

Técnicas para la función de planificación

PERT y CPM como técnicas para la planificación de actividades o Técnicas de programación de proyectos

Los proyectos a gran escala han existido desde tiempos antiguos; este hecho lo atestigua la construcción de las pirámides de Egipto y los acueductos romanos. Pero sólo ha sido en el último cuando se ha analizado por parte de los investigadores operacionales los problemas gerenciales asociados con dichos proyectos, la llamada administración de proyectos.

La administración de proyectos ha evolucionado como un nuevo campo con el desarrollo de dos técnicas analíticas para la planificación, programación y control de proyectos: el Método de Ruta Crítica (CPM) y la Técnica de Evaluación y Revisión de Proyectos (PERT).

El problema de la administración de proyectos surgió con el proyecto de armamentos del Polaris, empezando 1958. Con tantas componentes y subcomponentes juntos producidos por diversos fabricantes, se necesitaba una nueva herramienta para programar y controlar el proyecto. El PERT (evaluación de programa y técnica de revisión) fue desarrollado por científicos de la oficina Naval de Proyectos Especiales. Booz, Allen y Hamilton y la División de Sistemas de Armamentos de la Corporación Lockheed Aircraft. La técnica demostró tanta utilidad que ha ganado amplia aceptación tanto en el gobierno como en el sector privado.

Casi al mismo tiempo, la Compañía DuPont, junto con la División UNIVAC de la Remington Rand, desarrolló el método de la ruta crítica (CPM) para controlar el mantenimiento de proyectos de plantas químicas de DuPont. El CPM es idéntico al PERT en concepto y metodología. La diferencia principal entre ellos es simplemente el método por medio del cual se realizan estimados de tiempo para las actividades del proyecto. Con CPM, los tiempos de las actividades son determinísticos. Con PERT, los tiempos de las actividades son probabilísticos o estocásticos.

El PERT/CPM fue diseñado para proporcionar diversos elementos útiles de información para los administradores del proyecto. Primero, el PERT/CPM expone la "ruta crítica" de un proyecto. Estas son las actividades que limitan la duración del proyecto. En otras palabras, para lograr que el proyecto se realice pronto, las actividades de la ruta crítica deben realizarse pronto. Por otra parte, si una actividad de la ruta crítica se retarda, el proyecto como un todo se retarda en la misma cantidad. Las actividades que no están en la ruta crítica tienen una cierta cantidad de holgura; esto es, pueden empezarse más tarde, y permitir que el proyecto como un todo se mantenga en programa. El PERT/CPM identifica estas actividades y la cantidad de tiempo disponible para retardos.

El PERT/CPM también considera los recursos necesarios para completar las actividades. En muchos proyectos, las limitaciones en mano de obra y equipos hacen que la programación sea difícil. El PERT/CPM identifica los instantes del proyecto en que estas restricciones causarán problemas y de acuerdo a la flexibilidad permitida por los tiempos de holgura de las actividades no críticas, permite que el gerente manipule ciertas actividades para aliviar estos problemas.

Finalmente, el PERT/CPM proporciona una herramienta para controlar y monitorear el progreso del proyecto. Cada actividad tiene su propio papel en éste y su importancia en la terminación del proyecto se manifiesta inmediatamente para el director del mismo. Las actividades de la ruta crítica, permiten por consiguiente, recibir la mayor parte de la atención, debido a que la terminación del proyecto, depende fuertemente de ellas. Las actividades no críticas se manipularan y remplazaran en respuesta a la disponibilidad de recursos.

Antecedentes.

Dos son los orígenes del método del camino crítico: el método PERT (Program Evaluation and Review Technique) desarrollo por la Armada de los Estados Unidos de América, en 1957, para controlar los tiempos de ejecución de las diversas actividades integrantes de los proyectos espaciales, por la necesidad de terminar cada una de ellas dentro de los intervalos de tiempo

disponibles. Fue utilizado originalmente por el control de tiempos del proyecto Polaris y actualmente se utiliza en todo el programa espacial.

El método CPM (Critical Path Method), el segundo origen del método actual, fue desarrollado también en 1957 en los Estados Unidos de América, por un centro de investigación de operaciones para la firma Dupont y Remington Rand, buscando el control y la optimización de los costos de operación mediante la planificación adecuada de las actividades componentes del proyecto. Ambos métodos aportaron los elementos administrativos necesarios para formar el método del camino crítico actual, utilizando el control de los tiempos de ejecución y los costos de operación, para buscar que el proyecto total sea ejecutado en el menor tiempo y al menor costo posible.

Diferencias entre PERT y CPM

Los métodos PERT y CPM están básicamente orientados en el tiempo en el sentido que ambos llevan a la determinación de un programa de tiempo. Aunque los dos métodos fueron desarrollados casi independientemente, ambos son asombrosamente similares. Quizá la diferencia más importante es que originalmente las estimaciones en el tiempo para las actividades se supusieron determinantes en CPM y probables en PERT. Ahora PERT y CPM comprenden realmente una técnica y las diferencias, si existe alguna, son únicamente históricas. En adelante, ambas se denominarán técnicas de "programación de proyectos".

Como se indicó antes, la principal diferencia entre PERT y CPM es la manera en que se realizan los estimados de tiempo. El PERT supone que el tiempo para realizar cada una de las actividades es una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad. El CPM por otra parte, infiere que los tiempos de las actividades se conocen en forma determinísticas y se pueden variar cambiando el nivel de recursos utilizados.

La distribución de tiempo que supone el PERT para una actividad es una distribución beta. La distribución para cualquier actividad se define por tres estimados:

- el estimado de tiempo más probable,
- el estimado de tiempo más optimista, y
- el estimado de tiempo más pesimista.

El tiempo más probable es el tiempo requerido para completar la actividad bajo condiciones normales. Los tiempos optimistas y pesimistas proporcionan una medida de la incertidumbre inherente en la actividad, incluyendo desperfectos en el equipo, disponibilidad de mano de obra, retardo en los materiales y otros factores.

Con la distribución definida, la media (esperada) y la desviación estándar, respectivamente, del tiempo de la actividad para la actividad Z puede calcularse por medio de las fórmulas de aproximación. El tiempo esperado de finalización de un proyecto es la suma de todos los tiempos esperados de las actividades sobre la ruta crítica. De modo similar, suponiendo que las distribuciones de los tiempos de las actividades son independientes (realísticamente, una suposición fuertemente cuestionable), la varianza del proyecto es la suma de las varianzas de las actividades en la ruta crítica. Estas propiedades se demostrarán posteriormente.

En CPM solamente se requiere un estimado de tiempo. Todos los cálculos se hacen con la suposición de que los tiempos de actividad se conocen. A medida que el proyecto avanza, estos estimados se utilizan para controlar y monitorear el progreso. Si ocurre algún retardo en el proyecto, se hacen esfuerzos por lograr que el proyecto quede de nuevo en programa cambiando la asignación de recursos.

Utilidades de estas técnicas

La programación de proyectos por PERT-CPM consiste en tres fases básicas: Planificación, Programación y Control.

La fase de planificación se inicia descomponiendo el proyecto en actividades. Las estimaciones de tiempo para estas actividades se determinan luego y se construye un diagrama de red (o de flechas) donde cada uno de sus arcos (flechas) representa una actividad. El diagrama de flechas completo da una representación gráfica de las interdependencias entre las actividades del proyecto. La construcción del diagrama de flechas como una fase de planificación, tiene la ventaja de estudiar los diferentes trabajos en detalle, sugiriendo quizá mejoras antes del que el proyecto realmente se ejecute. Será más importante su uso en el desarrollo de un programa para el proyecto.

El último objetivo de la fase de programación es construir un diagrama de tiempo que muestre los tiempos de iniciación y terminación para cada actividad, así como su relación con otras actividades del proyecto. Además, el programa debe señalar las actividades críticas (en función del tiempo) que requieren atención especial si el proyecto se debe terminar oportunamente. Para las actividades no críticas el programa debe mostrar los tiempos de holgura que pueden utilizarse cuando tales actividades se demoran o cuando se deben usar eficientemente recursos limitados.

La fase final en la administración de proyectos es la de control. Esto incluye el uso del diagrama de flechas y la gráfica de tiempo para hacer reportes periódicos del progreso. La red puede, por consiguiente, actualizarse y analizarse y si es necesario, determinar un nuevo programa para la porción restante del proyecto.

El PERT permite, en un primer momento, fijar los objetivos empresariales. Una vez fijados estos objetivos también busca y organiza los medios necesarios para alcanzarlos y por último, controla la concordancia existente entre el plan fijado y lo que se está realizando.

El campo de acción de este método es muy amplio, dada su gran flexibilidad y adaptabilidad a cualquier proyecto grande o pequeño. Para obtener los mejores resultados debe aplicarse a los proyectos que posean las siguientes características:

- a. Que el proyecto sea único, no repetitivo, en algunas partes o en su totalidad.
- b. Que se deba ejecutar todo el proyecto o parte de el, en un tiempo mínimo, sin variaciones, es decir, en tiempo crítico.
- c. Que se desee el costo de operación más bajo posible dentro de un tiempo disponible.

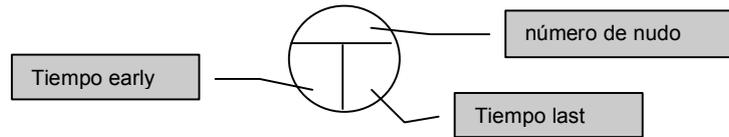
Dentro del ámbito aplicación, el método se ha estado usando para la planificación y control de diversas actividades, tales como construcción de presas, apertura de caminos, pavimentación, construcción de casas y edificios, reparación de barcos, investigación de mercados, movimientos de colonización, estudios económicos regionales, auditorías, planificación de carreras universitarias, distribución de tiempos de salas de operaciones, ampliaciones de fábrica, planificación de itinerarios para cobranzas, planes de venta, censos de población, etc., etc.

Elementos de un grafo (tanto PERT como CPM)

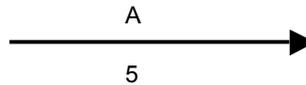
A continuación presentamos los conceptos básicos para poder dibujar el diagrama PERT. Es de capital importancia que cada uno de ellos quede claramente definido y entendido para el lector. Sobre esta base se construirá la metodología que vamos a presentar.

- Nudo, suceso o acontecimiento: es el comienzo a término de un trabajo. No es la ejecución real de un trabajo. Por ejemplo escribir un informe no es un nudo, en cambio comenzar o terminar un informe sí es un nudo. Todo nudo viene caracterizado por qué debe representar un punto significativo del proyecto, es el comienzo o el término de una tarea y no consume tiempo ni recursos.

Los nudos o sucesos deben tener lugar de una manera lógica y por tanto mantienen un orden dentro del grafo y por tanto se numerarán cada uno de ellos según la secuencia temporal. Se dibujan mediante un círculo (que posteriormente veremos como se completa).



- **Actividad:** Es la ejecución real de una tarea. Recordamos que un acontecimiento sólo era el comienzo o final de una tarea, no su ejecución. Lo representaremos por un flecha, en dónde colocaremos el nombre de la actividad y el coste de tiempo que supone:



En este ejemplo se ha dibujado la actividad A que consume 5 minutos o días de tiempo. Las actividades sí que consumen tiempo, por tanto requieren mano de obra, material, instalaciones, ...etc. Es decir, las actividades precisan dotarse de recursos para poder ser realizadas.

Cada actividad reside entre dos nudos. Al primero le denominaremos **nudo o acontecimiento antecedente** y al segundo **precedente**. Siempre la relación deberá ser directa, sin acontecimientos intermedios. Al primer nudo de una red PERT le denominaremos **iniciador**, y al último **finalizador**.

¿Cómo se construye un diagrama?

El diagrama de flechas representa las interdependencias y relaciones de precedencia entre las actividades del proyecto. Se utiliza comúnmente una flecha para representar una actividad, y la punta indica el sentido de avance del proyecto. La relación de precedencia entre las actividades se especifica utilizando eventos. Un evento representa un punto en el tiempo y significa la terminación de algunas actividades y el comienzo de nuevas. Las actividades que originan un cierto evento no puede comenzar hasta que las actividades que concluyen en el mismo evento hayan terminado. En la terminología de la teoría de redes cada actividad está representada por un arco dirigido y cada evento está simbolizado por un nodo. La longitud del arco no tiene que ser proporcional a la duración de la actividad ni tiene que dibujarse como línea recta.

Las reglas para construir el diagrama de flechas se resumirán ahora:

1. Cada actividad está representada por una y un solo una flecha en la red. Ninguna actividad puede representarse dos veces en la red.
2. Dos actividades diferentes no pueden identificarse por los mismos eventos terminal y de inicio.
3. Al fin de asegurar la relación de precedencia correcta el diagrama de flechas, las siguientes preguntas deben responderse cuando se agrega cada actividad a la red:

Para la construcción del grafo PERT se ha de tener en cuenta los principios de construcción que son los siguientes:

- a) Principio de designación sucesiva: se empieza a numerar los nudos por orden, desde el principio hasta el final.
- b) Principio de unicidad del suceso inicio y del suceso final: siempre tendremos un único nudo de inicio y otro de final

c) Principio de designación únivoca

CPM

Para explicarlo de manera práctica, vamos a coger un ejemplo y explicarlo sobre él. Imaginemos que tenemos que planificar un proyecto (por ejemplo la introducción en el mercado japonés de nuestros productos). Para ello sabemos que tenemos las siguientes fases, con la siguiente duración en meses:

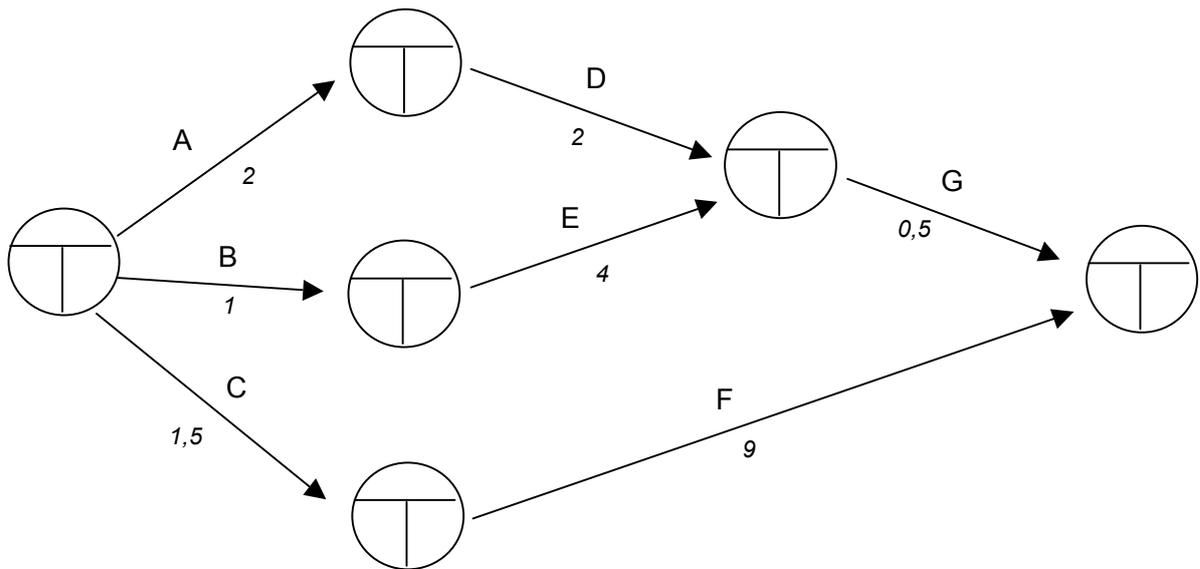
<i>Actividades</i>	<i>Tiempo</i>
Etapa A: estudio de la población japonesa	2 meses
Etapa B: estudio de la legislación	1 mes
Etapa C: estudio de la competencia	1,5 meses
Etapa D: contactos con organizaciones japonesas	2 meses
Etapa E: contactos con empresas de importación-exportación	4 meses
Etapa F: formación de nuestros empleados que enviaremos a Japón	9 meses
Etapa G: búsqueda de solares para implantar la empresa	0,5 meses

Si hacemos una etapa detrás de la otra, necesitaremos 21 meses para acabar el proyecto (casi dos años) para implantarnos en Japón. Existe la posibilidad de hacer actividades en paralelo y así conseguir acabar antes el proyecto. Realizando un estudio de las actividades que se pueden hacer en paralelo y el orden de cada una de las etapas o actividades obtendríamos la siguiente tabla:

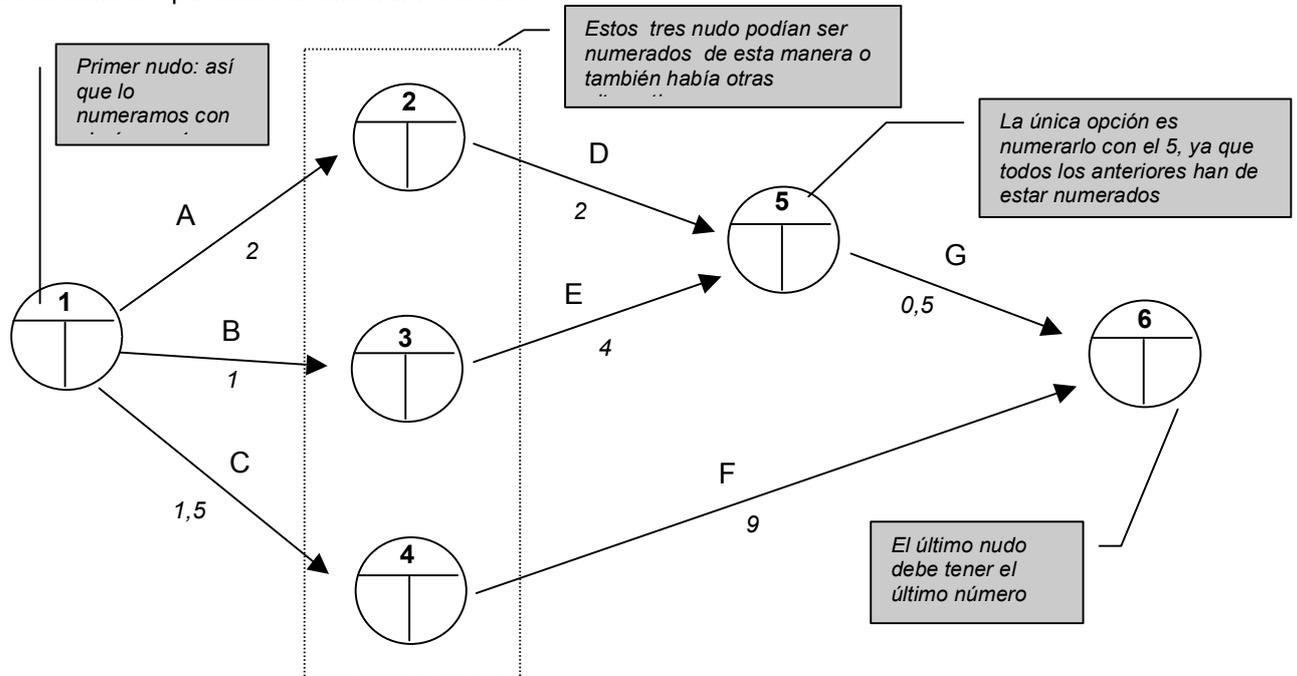
<i>Actividad</i>	<i>Actividad precedente</i>
<i>A</i>	-
<i>B</i>	-
<i>C</i>	-
<i>D</i>	<i>A</i>
<i>E</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>F</i>
<i>G</i>	<i>D, E</i>

De esta tabla podemos concluir que la actividad A, B y C no necesitan antecedentes, es decir que se pueden hacer de forma paralela y a la vez; la actividad D, no podrá empezar hasta que la actividad A esté acabada y la E, sucederá lo mismo con la E, que no empezará hasta que la B no esté acabada. Para empezar la realización de la F necesitamos que la C esté acabada y para empezar la G, necesitamos que D y E, se hayan concluido.

Si ahora traspasamos este razonamiento a un grafo PERT (recordar que las actividades se representan por flechas que consumen recursos y que además les tenemos que dibujar un nudo de inicio y un final) obtendríamos:

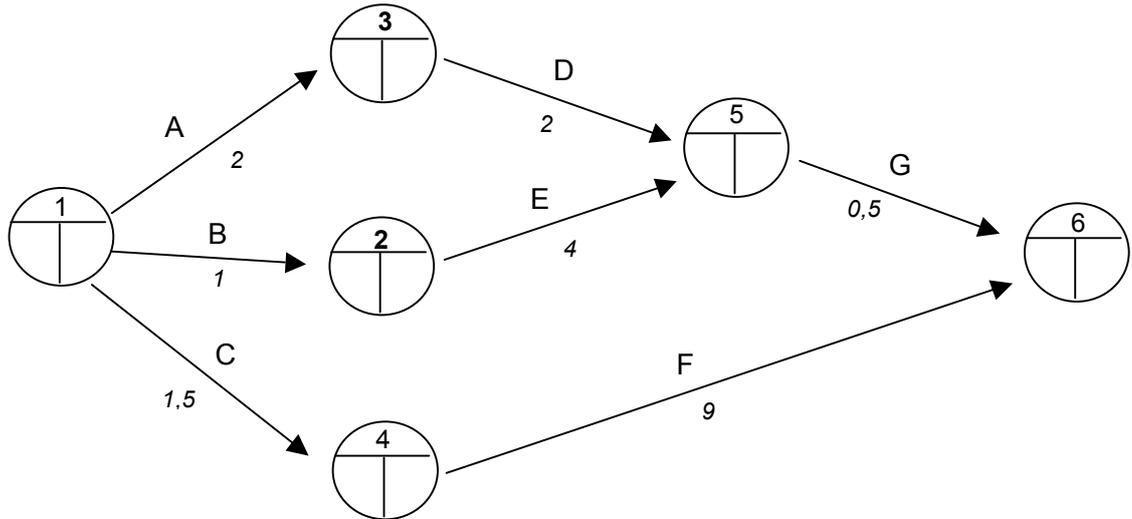


A continuació pasamos a numerar los nudos:



Esta es una alternativa, aunque existen otras posibilidades. Las alternativas son solamente cambios en la numeración de las alternativas que se pueden hacer de manera simultanea, es decir las que están encuadradas en un rectángulo con línea discontinua.

Una alternativa sería la que se presenta a continuación:

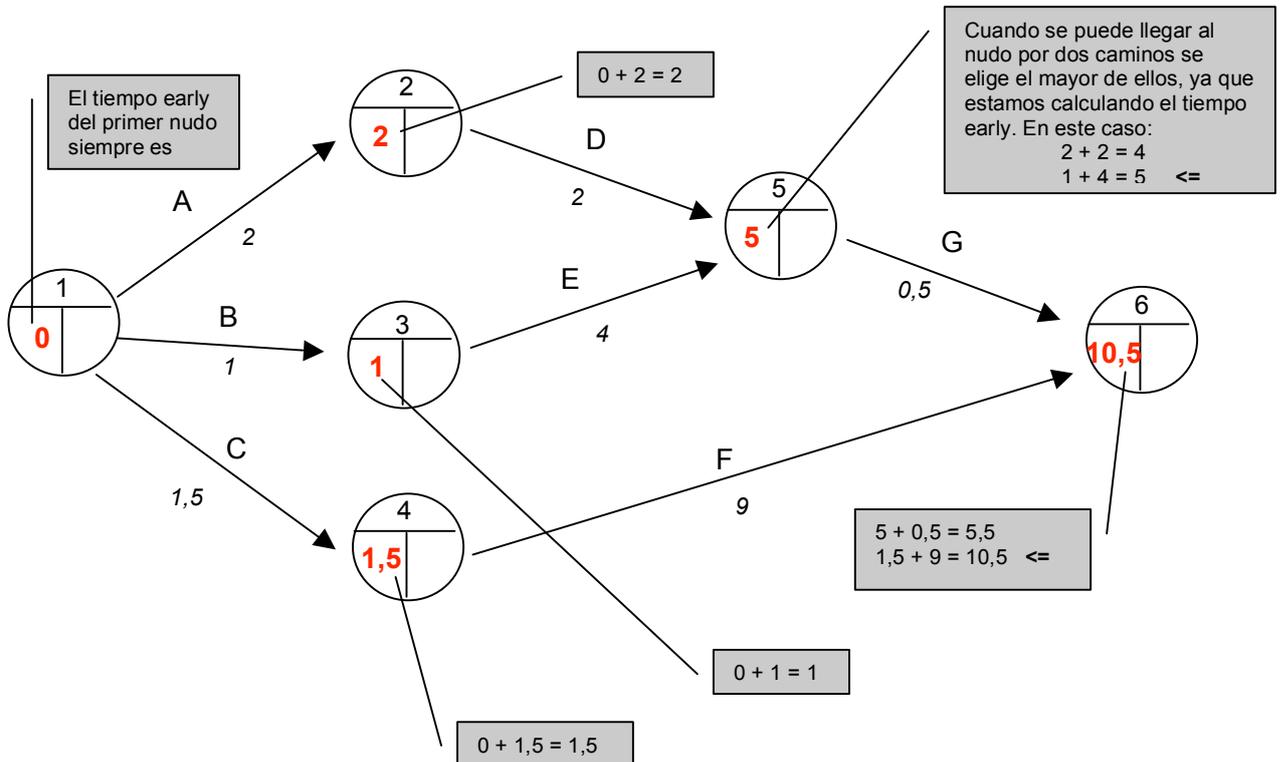


Una vez dibujado el grafo PERT se debe calcular el tiempo necesario para acabar el proyecto. Para realizar este cálculo se necesita saber el tiempo early y el last.

Tiempo early (T_E) de un acontecimiento representa el tiempo más breve en el que puede llevarse a cabo un acontecimiento. Viene representado por el camino de mayor consumo de tiempo.

Es el tiempo que como máximo se necesita para realizar las actividades que tenemos por a la izquierda de este nudo. Se empieza a calcular desde el primer nudo hasta el último y se sitúa en la cuadrícula izquierda de cada nudo. El tiempo early del primer nudo es cero y los posteriores se calculan sumando el tiempo early del nudo anterior más la actividad que hay entre los nudos.

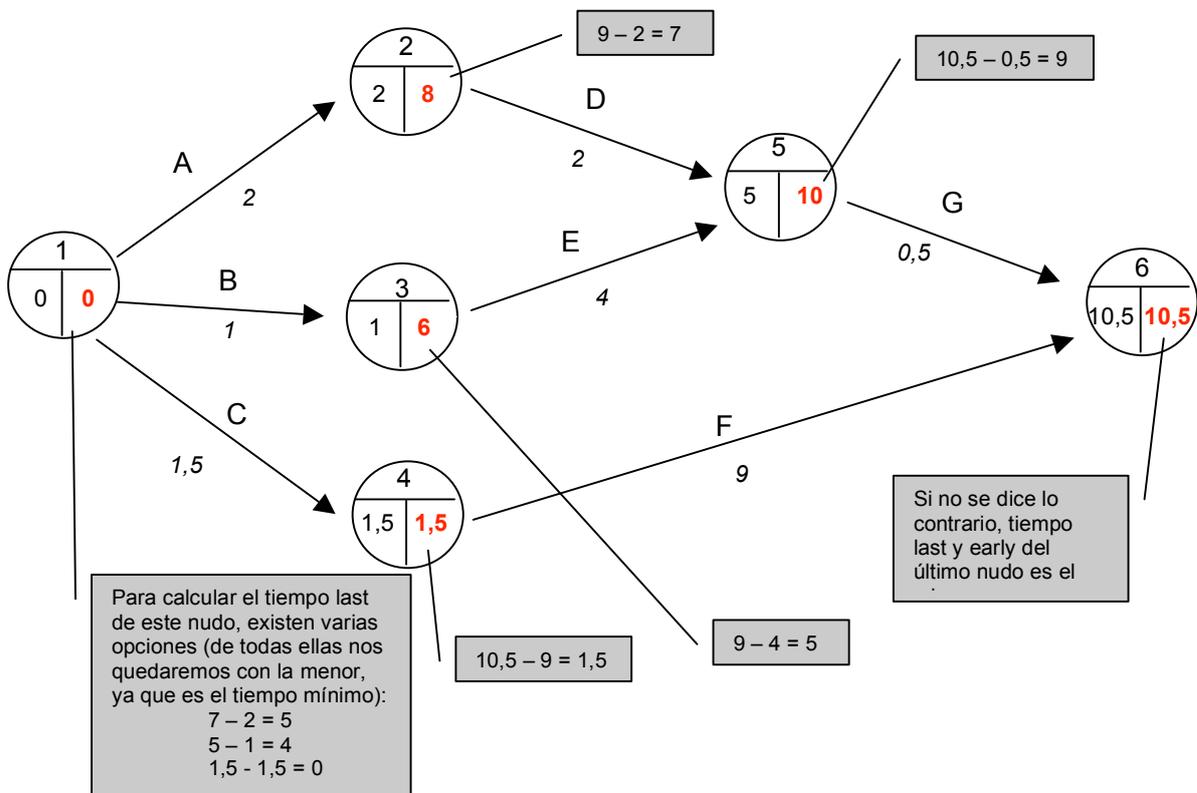
Veamos como se calcula con nuestro ejemplo anterior.



El siguiente paso es determinar los tiempos máximos permitidos para lograr cada acontecimiento, que denominaremos **tiempo last** (T_L). Los calcularemos siguiendo el sentido contrario de la red PERT, es decir:

- Empezaremos por el último acontecimiento y terminaremos por el primero. Si no nos dicen lo contrario, por construcción del grafo PERT, el tiempo last del último nudo será igual que su tiempo early.
- Para calcular el T_L de un acontecimiento se resta el valor T_e del valor T_L del acontecimiento sucesor.
- Si se obtiene más de un valor T_L se elige el mínimo valor.

En nuestro ejemplo tendremos los siguientes cálculos:



Con este grafo podemos concluir que planificando correctamente cada una de estas actividades y con el tiempo que tenemos de cada una de ellas, el proyecto se puede acabar en menos de un año, exactamente en 10,5 meses. Si lo comparamos con la duración inicial, se observa que hemos ganado 10,5 meses (que es la diferencia entre 21 meses que es lo que tardaba anteriormente el proyecto a ahora que somos capaces de hacerlo en 10,5 meses).

El último concepto que nos queda por explicar a la hora de construir un grafo Pert, es el **camino crítico**. A la diferencia entre los tiempos last y early de cada acontecimiento le denominamos **holgura**. La existencia de holguras puede indicar posible exceso de recursos, que un buen planificador debe minimizar.

Las holguras de cada actividad se calculan de la siguiente manera, se resta del tiempo last del nudo final, el tiempo early del nudo inicial y el tiempo de la actividad. Con esto conseguiremos obtener el tiempo sobrante que tenemos los recursos parados y por tanto tiempo que se ha de intentar minimizar. Matemáticamente tenemos:

$$H_{x,y} = T_{Ly} - (T_{Ex} + \text{duracion actividad}_{x,y})$$

En ejemplo que estamos utilizando para la explicación obtendríamos las siguientes holguras:

$$H_A = T_{L2} - (T_{E1} + \text{duracion actividad}_A) = 7 - (0 + 2) = 5$$

$$H_B = T_{L3} - (T_{E1} + \text{duracion actividad}_B) = 5 - (0 + 1) = 4$$

$$H_C = T_{L4} - (T_{E1} + \text{duracion actividad}_C) = 1,5 - (0 + 1,5) = 0$$

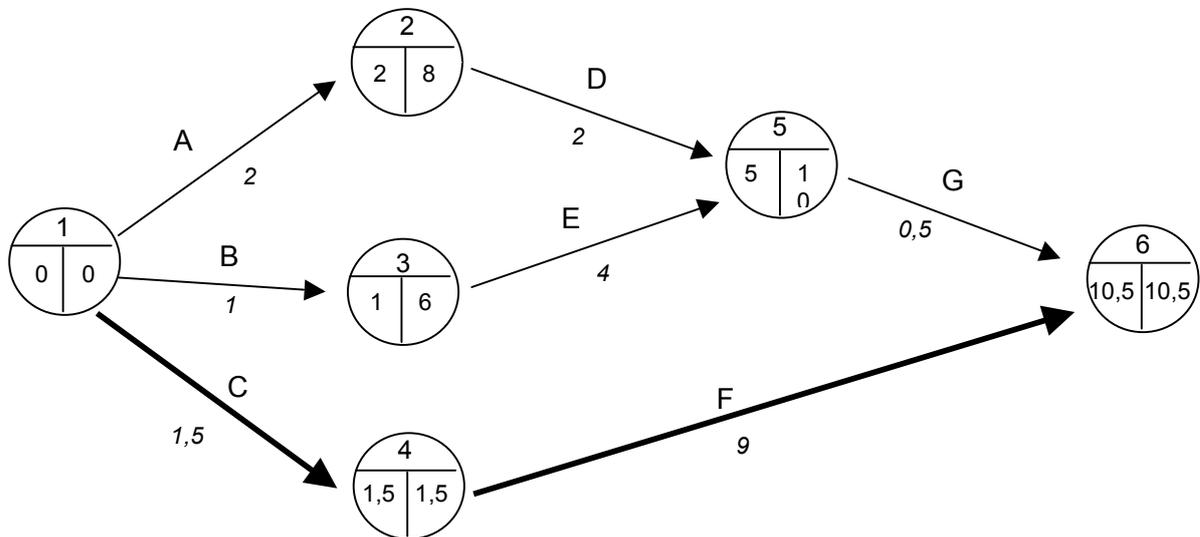
$$H_D = T_{L5} - (T_{E2} + \text{duracion actividad}_D) = 9 - (2 + 2) = 5$$

$$H_E = T_{L5} - (T_{E3} + \text{duracion actividad}_E) = 9 - (1 + 4) = 4$$

$$H_F = T_{L6} - (T_{E4} + \text{duracion actividad}_F) = 10,5 - (1,5 + 9) = 0$$

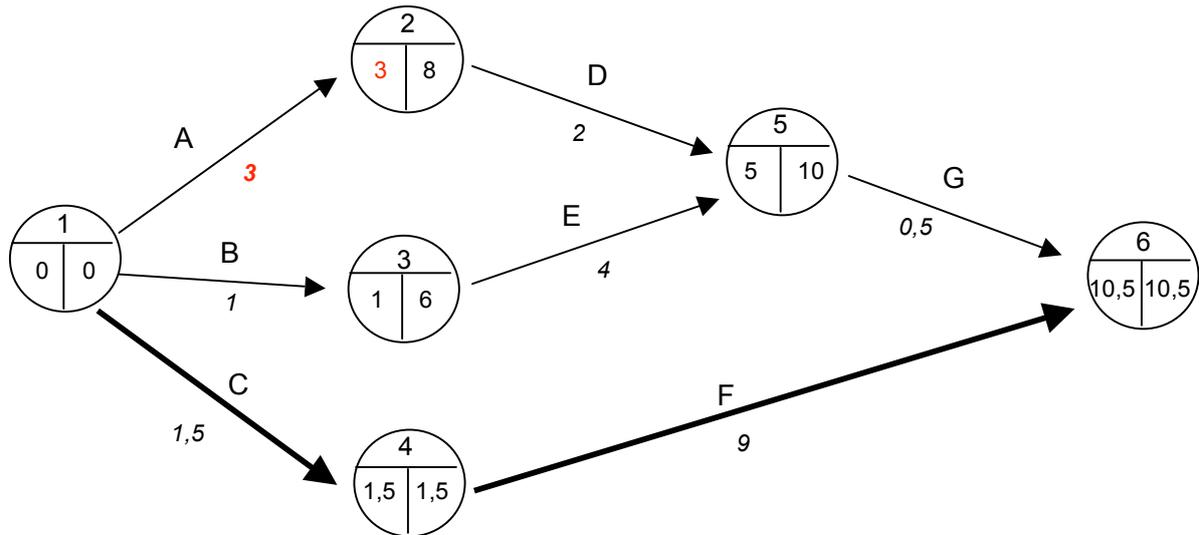
$$H_G = T_{L6} - (T_{E5} + \text{duracion actividad}_G) = 10,5 - (5 + 0,5) = 4$$

El conjunto de acontecimientos que minimizan las holguras forman un camino crítico, por el que puede recorrerse el proyecto, es decir, el **camino crítico** es aquel camino con una holgura mínima (recordando siempre que el camino crítico va desde el nudo inicial hasta el final).

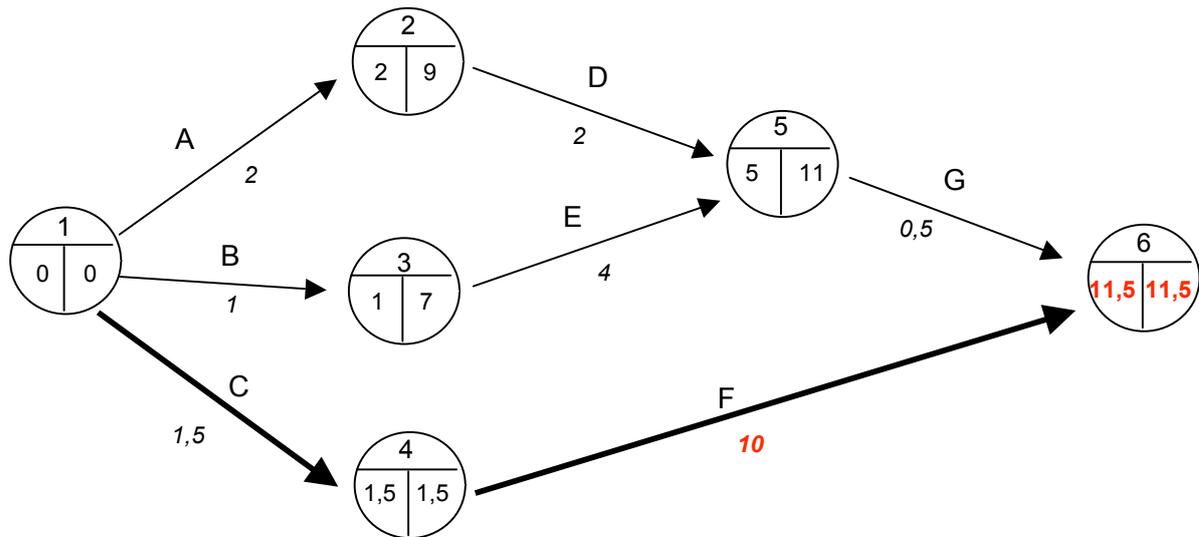


El camino crítico es el que requiere el máximo tiempo para llegar al final del proyecto. Un retraso en el camino crítico equivale a un retraso en el acontecimiento final.

Por ejemplo si se retrasa la actividad A, es decir en lugar de hacerla en 2 meses al final surgen problemas y se retrasa y acaba realizándose en 3 meses, como la actividad A no forma parte del camino crítico la duración total del proyecto no se verá modificada, seguiremos acabándolo en 10,5 meses. Veámoslo:



La holgura no es más que un colchón de recursos por si surgiera un retraso, esto significa que las actividades de holgura cero, se han de controlar al máximo, ya que un retraso en una de ellas significarán el retraso total del proyecto en la misma duración. De tal manera que si en lugar de retrasarse un mes la actividad A es la F la que se retrasa tendríamos:



Como observamos en el grafo anterior la duración total del proyecto ha aumentado, se ha retrasado, en la misma duración que el aumento o retraso de la actividad crítica.

Ejercicios resueltos de CPM

1. Para llevar a cabo un proyecto es necesario realizar las siguientes actividades, cuyo orden y duraciones estimadas (en días) se presentan a continuación:

Actividad	Actividades precedentes	Duración en días estimados
A	-	6
B	-	9

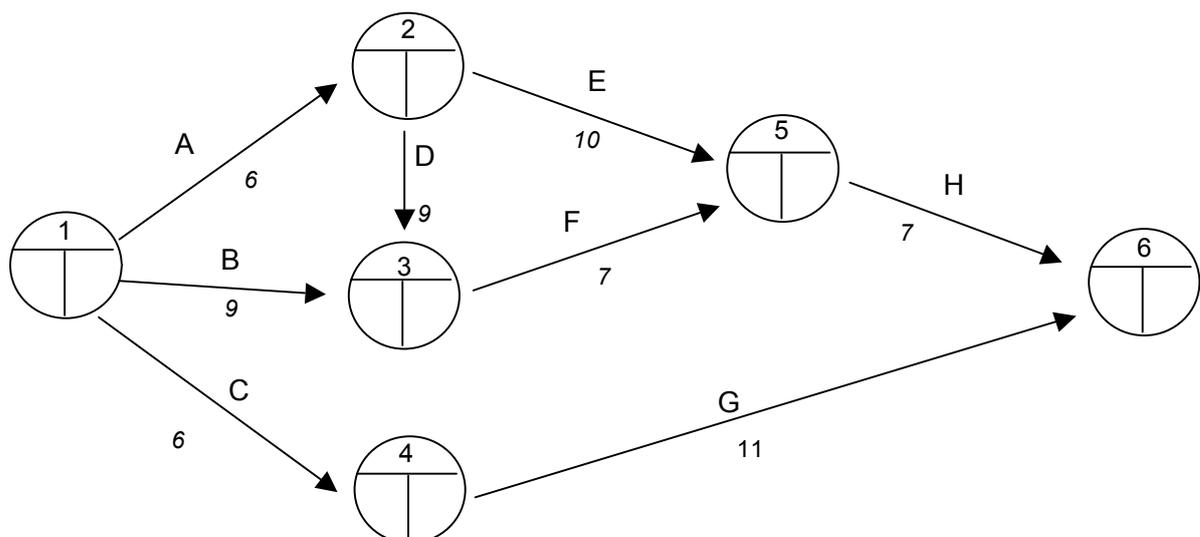
C	-	6
D	A	9
E	A	10
F	B,D	7
G	C	11
H	E,F	7

Se pide:

- Construya la red PERT.
- Determinar el tiempo mínimo esperado necesario para terminar todas las operaciones.
- Calcular las holguras de cada actividad. ¿Qué actividades componen el camino crítico?

Solución al ejercicio 1

Para solucionar el ejercicio debemos construir en un primer momento el grafo que planifica la realización de las actividades. Siguiendo el orden establecido en la tabla obtenemos el siguiente dibujo:



En el grafo se han colocado las actividades en su orden, se han numerado cada nudo y también se han colocado cada uno de los tiempos de cada actividad. El siguiente paso que se debe hacer es el calcular el tiempo early y el tiempo last de cada uno de los nudos o acontecimientos.

Recordamos que el tiempo early del primer nudo es cero, ya que un nudo no consume recursos sino que solo indica que es el inicio o final de una actividad. Para calcular el tiempo early de cada nudo se suma el tiempo early del nudo anterior y el tiempo de cada actividad. Cuando en un nudo hay dos actividades que acaban en él, se escogerá aquella actividad que sea mayor, ya que el nudo ha de representar el final de todas las actividades que acaban en él.

Seguindo esta metodología obtendremos el siguiente grafo, con los siguientes tiempos early y last:

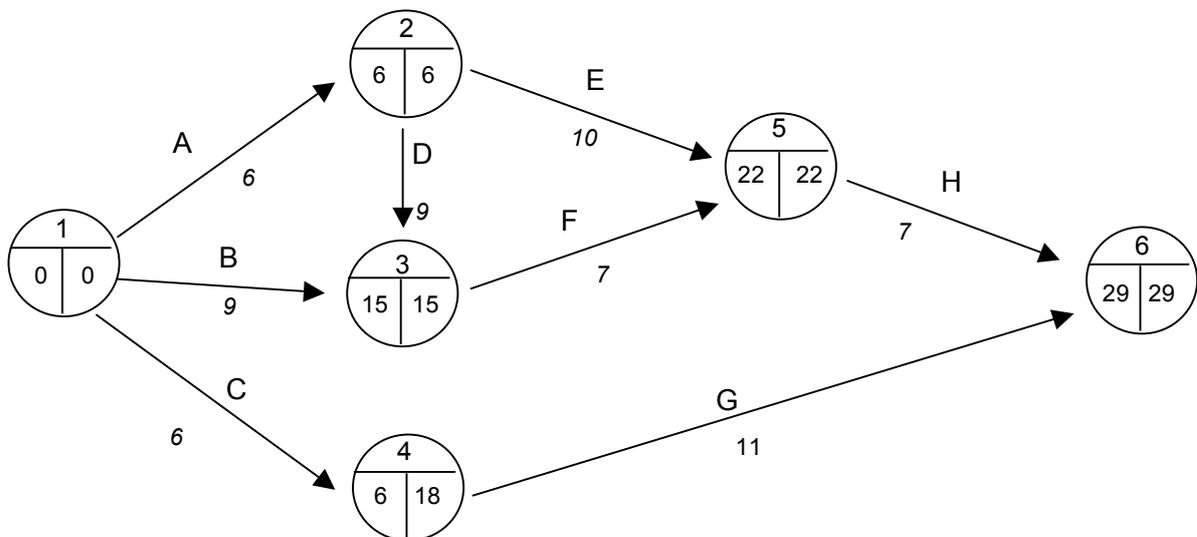
Nudo 1: tiempo early = 0

Nudo 2: tiempo early = tiempo early del nudo anterior + tiempo de la actividad = $0 + 6 = 6$

Nudo 3: tiempo early = tiempo early del nudo anterior + tiempo de la actividad. En este caso tenemos dos posibilidades:

A) $6 + 9 = 15$ ← Se elige la mayor

B) $0 + 9 = 9$



Para calcular el tiempo last de cada uno se empieza desde el nudo final. Se hace coincidir el tiempo early con el last y a partir de este punto se van calculando el resto de tiempos.

Nudo 5: tiempo last = tiempo last nudo 6 – tiempo de la actividad H = $29 - 7 = 22$

Nudo 4: tiempo last = tiempo last nudo 6 – tiempo de la actividad G = $29 - 11 = 18$

Nudo 3: tiempo last = tiempo last nudo 5 – tiempo de la actividad F = $22 - 7 = 15$

Nudo 2: tiempo last = tiempo last nudo anterior – tiempo de la actividad. En este caso tenemos dos posibilidades:

A. $22 - 10 = 12$

B. $15 - 9 = 6$ ← Se elige el menor

De esta manera conseguimos calcular todos los tiempos y estamos en disposición de responder a la pregunta. Para poder acabar el proyecto se necesitan 29 días.

Para conocer el camino crítico, primero se han de calcular las holguras de las actividades. Para ello, debemos solucionar los siguientes cálculos:

$$H_A = T_{L2} - (T_{E1} + \text{duracion actividad}_A) = 6 - (0 + 6) = 0$$

$$H_B = T_{L3} - (T_{E1} + \text{duracion actividad}_B) = 15 - (0 + 9) = 6$$

$$H_C = T_{L4} - (T_{E1} + \text{duracion actividad}_C) = 18 - (0 + 6) = 12$$

$$H_D = T_{L5} - (T_{E2} + \text{duracion actividad}_D) = 15 - (6 + 9) = 0$$

$$H_E = T_{L5} - (T_{E3} + \text{duracion actividad}_E) = 22 - (6 + 10) = 6$$

$$H_F = T_{L6} - (T_{E4} + \text{duracion actividad}_F) = 22 - (15 + 7) = 0$$

$$H_G = T_{L6} - (T_{E5} + \text{duracion actividad}_G) = 29 - (6 + 11) = 12$$

$$H_H = T_{L6} - (T_{E5} + \text{duracion actividad}_H) = 29 - (22 + 7) = 0$$

Observando las actividades que tienen holgura cero serán aquellas que formen parte del **camino crítico** (sabiendo que cualquier camino crítico ha de ir desde el primer nudo hasta el nudo final), por tanto el camino crítico de este proyecto son: A, D, F y H.

El significado de este camino crítico es que indica que actividades debemos tener más controladas ya que un fallo, retraso o error en algunas de ellas, significarán un retraso en todo el proyecto. De esta afirmación podemos extraer que si se retrasan el resto de actividades no ha de significar un retraso de todo el proyecto, aunque dependerá de la holgura que tenga cada actividad¹.

Una vez acabado este ejercicio no consideramos oportunos hacer más ejercicios de este tipo, ya que se trata de conceptos básicos que posteriormente se irán aplicando en el resto de ejercicios del documento y por tanto se podrán seguir aplicando a lo largo del tema².

¹ La existencia de una holgura en las actividades es como un colchón que permite absorber los posibles retrasos en las actividades, por eso las que tienen holgura cero, no pueden permitirse ningún retraso.

² Para realizar más ejercicios de este tipo, véase el libro: Guitart y Núñez: "*Problemas de Economía de la Empresa*". Textos docents (Universitat de Barcelona); 198. Edicions Universitat de Barcelona. Barcelona, 2000.

2. PERT

El método denominado PERT "Program Evaluation and Review Technique" puede ser catalogado como un método cuantitativo de planificación. Sencillo, pero completo, conduce a la correcta toma de decisiones por parte de los directivos de la empresa.

Nació a finales de 1957, como resultado de un encargo de la oficina de proyectos especiales de la armada estadounidense a la división de sistemas de lockheed y a la empresa de consultoría Booz Allen & Hamilton. El resultado fue el método PERT, cuya primera aplicación se enmarcó dentro del proyecto *polaris* del ejercito americano

El PERT actúa como una herramienta para definir y coordinar lo que hay que hacer para llevar a cabo, con éxito y a tiempo, de los objetivos de un proyecto. Su campo de aplicación es tan amplio como el número de actividades susceptibles de planificación. El PERT es un instrumento que ayuda a tomar decisiones, pero no las toma; sólo aporta información para tomarlas. Es por ello muy interesante conocer esta técnica y de ser capaz de utilizar su información, y con este fin hemos redactado este documento

Una red PERT no tiene una única solución, dependerá de las prioridades que el directivo asigne a cada uno de los acontecimientos que intervienen.

Su construcción es muy similar a la herramienta CPM. Sin embargo a la hora de construir un grafo PERT no tenemos la seguridad, ni la certeza del tiempo de cada actividad, sino que para cada asignación de tiempos se hace una triple distinción:

- **Tiempo optimista:** Mínimo periodo de tiempo posible que es necesario para realizar una actividad.
- **Tiempo más probable:** Es la mejor estimación de tiempo necesario para realizar una actividad.
- **Tiempo Pesimista:** Máximo tiempo que se tardaría en realizar una actividad.

Las estimaciones son sobre las actividades, no sobre los acontecimientos. Con estas estimaciones podemos determinar un tiempo medio -que simbolizaremos como T_e - y que recogerá el valor promedio de las tres estimaciones con una ponderación determinada. Es decir, si ocurriera muchas veces cabría esperar que T_e tomara un valor tal como:

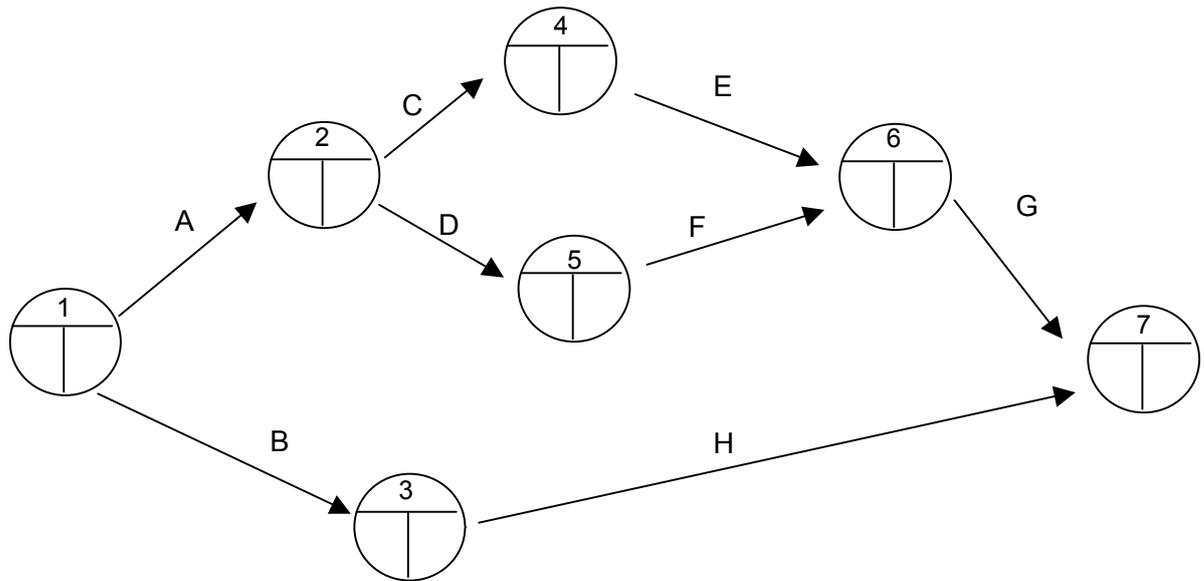
$$T_e = \frac{\text{Optimista} + 4\text{Probable} + \text{Pesimista}}{6}$$

Es importante recordar que un acontecimiento no se considerará finalizado si todas las actividades que conducen a él no han sido terminadas.

Igual que en el caso anterior vamos a realizar la explicación basándonos en un ejemplo. En este caso, el grafo PERT tiene los siguientes acontecimientos y sus respectivos tiempos.

Acontecimiento	Predecesor	Sucesor	Optimista	Probable o Normal	Pesimista
A	1	2	4	6	8
B	1	3	6	8	13
C	2	4	2	2	2
D	2	5	2	4	9
E	4	6	10	12	17
F	5	6	5	6	7
G	6	7	2	3	4
H	3	7	11	12	13

Construimos la red o el grafo PERT:



Una vez construido el grafo Pert, vamos a calcular los tiempos, holguras y averiguar cual es el camino crítico. El primer problema que nos surge es ¿qué tiempo debemos utilizar para calcular el tiempo early y el last? Como directores del proyecto sabemos que la actividad A en el mejor de los tiempos puede tardar 4 semanas, lo más normal y lo lógico serían que tardase 6 pero puede que todo vaya mal y llegue a tardar hasta 7 semana. ¿Qué hacemos? El Pert propone utilizar un tiempo medio ponderado, al que llamaremos *tiempo esperado*, (T_e). Este tiempo se calcula para cada actividad y es una media a la que se le da cuatro veces más importancia el tiempo normal que al tiempo pesimista o al optimista.

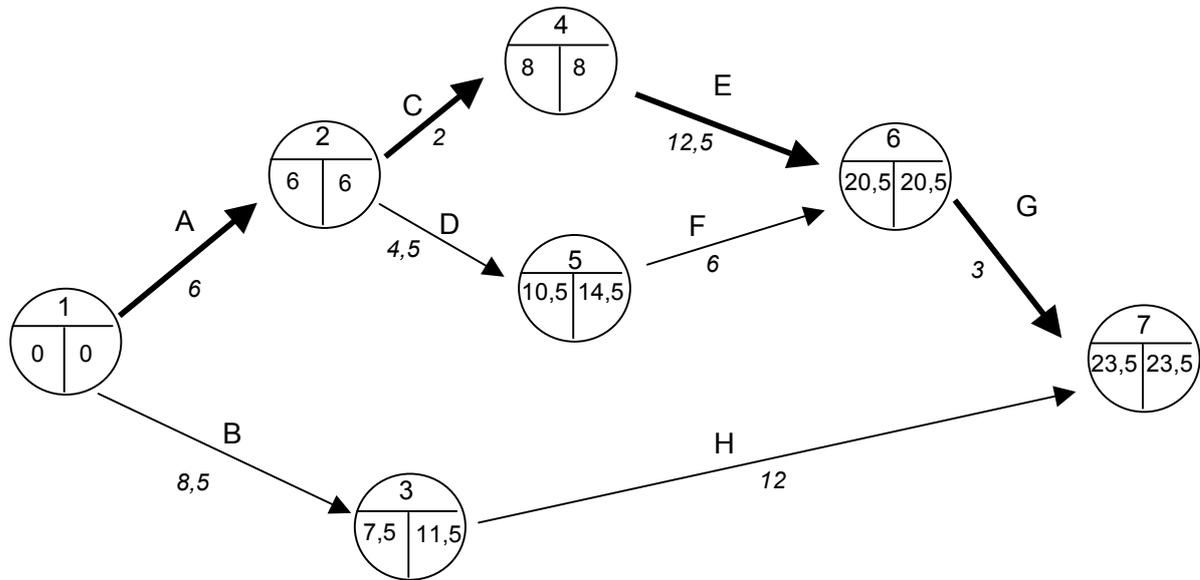
Utilizando la fórmula, ya vista anteriormente:

$$T_e = \frac{\text{Optimista} + 4\text{Probable} + \text{Pesimista}}{6}$$

Obtenemos los siguientes tiempos esperados:

Acontecimiento	Optimista	Probable o Normal	Pesimista	T_e
A	4	6	8	6
B	6	8	13	8,5
C	2	2	2	2
D	2	4	9	4,5
E	10	12	17	12,5
F	5	6	7	6
G	2	3	4	3
H	11	12	13	12

Con el cálculo del tiempo esperado ya podemos calcular el tiempo early, el tiempo last y obtener cuál es el camino crítico.



Una vez calculado el camino crítico sabemos que la duración mínima para realizar el proyecto es de 23,5 semanas, que antes es imposible acabarlo. De la misma manera sabemos que las actividades críticas, aquellas que deberemos destinar más recursos a controlar ya que un retraso de ellas nos retrasaran todo el proyecto, son A, C, E y G.

El PERT no sólo ordena y prioriza las actividades de un proyecto, sino que también tiene en cuenta la incertidumbre en los plazos de realización, es decir, calcula la probabilidad de que un acontecimiento se cumpla en la fecha prevista. Para que averiguar esta información debemos estudiar la varianza y su distribución estadística.

La varianza nos da el grado de dispersión que tiene cada acontecimiento, es decir, la diferencia entre su tiempo pesimista, normal o optimista.

Su formulación es la siguiente:

$$\sigma^2 = \left[\frac{\text{Pesimista} - \text{Optimista}}{6} \right]^2$$

Cada triplete de números (optimista, más probable y pesimista) tiene una incertidumbre asociada a su distribución que puede actuar más -o menos- en función de como incidan diversas circunstancias. Esta incertidumbre viene reflejada por la varianza (σ^2). Cuanto mayor sea la varianza de una actividad mayor será la incertidumbre para cumplir los plazos establecidos. Veamos un ejemplo sencillo:

Ejemplo: Si una actividad tiene la siguiente tripleta de tiempo pesimista, normal y optimista: 3, 6 y 8. La dispersión es 0,69 evidentemente tiene mayor dispersión que si los tiempos fueran 5, 6 y 7, cuya varianza es de 0,11. Que la primera tripleta tenga mayor dispersión significa que los tiempos están más alejados de la media esperada que es de 5,83 mientras que en el segundo caso, la media esperada es de 6 y por tanto los tiempos están más cerca de la media.

En nuestro ejemplo tenemos los siguientes cálculos de la varianza:

Acontecimiento	Optimista	Probable	Pesimista	Te	σ^2
A	4	6	8	6	0,44
B	6	8	13	8,5	1,36
C	2	2	2	2	0,00
D	2	4	9	4,5	1,36
E	10	12	17	12,5	1,36
F	5	6	7	6	0,11

G	2	3	4	3	0,11
H	11	12	13	12	0,11

Para calcular las probabilidades debemos saber cómo se comportan los tiempos. Utilizando conceptos estadísticos, que ahora no vamos a profundizar, afirmamos que estos tiempos se comporta según una función normal de distribución (ver anexo), y la podemos formular su estadístico como:

$$Z = \frac{T_S - T_E}{\sqrt{\sigma_E^2}} \quad \text{donde} \quad \sigma_E^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{T_{Ei}}^2$$

Entendemos como T_S el tiempo objetivo, es decir aquel tiempo en el que pretendemos llegar a un acontecimiento determinado.

Cuando el estadístico Z tiene un valor igual a 0, la probabilidad de cumplir los plazos es del 50%; cuando $Z > 0$, la probabilidad de cumplir los plazos es superior al 50%; y cuando $Z < 0$, la probabilidad de cumplir los plazos es menor del 50%.

En el mismo ejemplo que estamos siguiendo hasta el momento nos preguntamos dos preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de terminar en 22 semanas todo el proyecto?
2. ¿Cuál sería la probabilidad de terminar en 20 semanas la actividad E?

Para solucionar este primer apartado, se ha determinado que el tiempo objetivo sea 22 semanas. Para calcular la probabilidad debemos conocer anteriormente el estadístico Z , de la siguiente manera:

$$z = \frac{22 - 23,5}{\sqrt{1,91}} = -1,085 \quad \text{donde} \quad \sigma^2 = 0,44 + 0 + 1,36 + 0,11 = 1,91$$

Este $-1,085$ no es la probabilidad sino es un estadístico que se utiliza para buscar la probabilidad en las tablas. Buscamos en tablas y observamos que para un estadístico de $-1,080$, la probabilidad es de 0,0359, es decir del 3,59%. Es decir, la probabilidad que este proyecto se acabe en 22 semanas tiene una probabilidad de 3,59%, es decir muy baja, con lo que podríamos asegurar que casi es imposible acabarlo en 22 semanas.

En el segundo caso, nos piden conocer la probabilidad de terminar la actividad E en un determinado el tiempo objetivo, exactamente en 20 semanas ($T_S = 20$). En los cálculos hechos anteriormente se le otorgó un tiempo early al acontecimiento 6 igual a 20,5 días ($T_E = 20,5$).

Para calcular la probabilidad de llegar el día 19 debemos calcular el estadístico z , donde:

$$z = \frac{20 - 20,5}{\sqrt{1,8}} = -0,37 \quad \text{donde} \quad \sigma^2 = 0,44 + 0 + 1,36 = 1,8$$

Contrastando el resultado del estadístico Z en la tabla que recoge los valores de la función estándar de la distribución normal (ver tabla final) encontramos que el valor de $Z = -0,37$ equivale a una probabilidad cercana al 0,6564. Es decir, la probabilidad de terminar, en 20 semanas el acontecimiento 6, es aproximadamente el 65,64%.

Lo mismo puede hacerse con cada uno de los acontecimientos de la red que en cada proyecto podamos construir.

Un **criterio** generalmente aceptado es:

Si la probabilidad es inferior al 25% la aceptación del plazo temporal fijado supone mucho riesgo, una probabilidad del 50% significa que es fácil terminar en la fecha programada y, por último, probabilidades superiores al 60% muestran la utilización de excesivos recursos en esa fase del proyecto.

A continuación presentamos la tabla de valores de la función estándar de distribución normal.

Tabla de valores de la función estándar de distribución normal

z	o	z	o
0,0	0,5000	-3,0	0,0013
0,1	0,5398	-2,9	0,0019
0,2	0,5793	-2,8	0,0026
0,3	0,6179	-2,7	0,0035
0,4	0,6554	-2,6	0,0047
0,5	0,6915	-2,5	0,0062
0,6	0,7257	-2,4	0,0082
0,7	0,7580	-2,3	0,0107
0,8	0,7881	-2,2	0,0139
0,9	0,8159	-2,1	0,0179
1,0	0,8413	-2,0	0,0228
1,1	0,8643	-1,9	0,0287
1,2	0,8849	-1,8	0,0359
1,3	0,9032	-1,7	0,0446
1,4	0,9192	-1,6	0,0548
1,5	0,9332	-1,5	0,0668
1,6	0,9452	-1,4	0,0808
1,7	0,9554	-1,3	0,0968
1,8	0,9641	-1,2	0,1151
1,9	0,9713	-1,1	0,1357
2,0	0,9772	-1,0	0,1587
2,1	0,9821	-0,9	0,1841
2,2	0,9861	-0,8	0,2119
2,3	0,9893	-0,7	0,2420
2,4	0,9918	-0,6	0,2743
2,5	0,9938	-0,5	0,3085
2,6	0,9953	-0,4	0,3446
2,7	0,9965	-0,3	0,3821
2,8	0,9974	-0,2	0,4207
2,9	0,9981	-0,1	0,4602
3,0	0,9987	-0,0	0,5000