DOCUMENTO CEDE 2004-34
ISSN 1657-7191 (Edición Electrónica)
SEPTIEMBRE DE 2004

CEDE

ECONOMIA DE LA PRODUCCION DE BIENES AGRICOLAS TEORÍA Y APLICACIONES[1]

RAMÓN ANTONIO ROSALES ÁLVAREZ[2], EDSON APAZA MAMANI[3], JORGE ALEXANDER BONILLA LONDOÑO[4]

Resumen

El documento tiene como objetivo principal mostrar el marco teórico y operativo de la economía de la producción de los bienes agrícolas. En el marco teórico se desarrollan los principios microeconómicos relacionados con la producción y los costos de los bienes agrícolas, así como las leyes que soportan la teoría de la dualidad. La parte empírica o aplicada del documento se centra en la estimación de modelos econométricos de las funciones de producción más utilizadas en la agricultura. A partir de los modelos estimados se derivan y se representan gráficamente los conceptos más importantes que se tienen en cuenta en el análisis económico de la producción agrícola. Las bases de datos se han construido a partir de experimentos agrícolas llevados a cabo en los centros de investigación agropecuaria de Colombia y México.

Finalmente, el presente documento pretende contribuir al inicio de una serie de publicaciones en las que se muestre los resultados de distintos estudios llevados a cabo en el área de economía agrícola del Programa de Maestría en Economía del Medio Ambiente y Recursos Naturales – PEMAR de la Facultad de Economía de la Universidad de los Andes.

Palabras clave: economía agrícola, economía de la producción, dualidad

Clasificación JEL: E23, Q12

---

[1] Este documento hace parte de las notas de clase del curso Desarrollo, Economía Agrícola y Medio Ambiente, del programa de Maestría en Economía del Medio Ambiente y de los Recursos Naturales – PEMAR de la Facultad de Economía – Universidad de Los Andes.

[2] Economista Agrícola Ph. D., Profesor Asociado Facultad de Economía, Universidad de Los Andes. Profesor del curso Desarrollo, Economía Agrícola y Medio Ambiente, Econometría I, y Econometría Avanzada. Facultad de Economía. Universidad de Los Andes.

[3] Magíster en Economía y Magíster en Economía del Medio Ambiente y de los Recursos Naturales, Profesor Asistente curso Desarrollo, Economía Agrícola y Medio Ambiente, Facultad de Economía. Universidad de Los Andes.

[4] Magíster en Economía y Magíster en Economía del Medio Ambiente y de los Recursos Naturales, Profesor Econometría II, Taller de Econometría I y Taller de Econometría Avanzada. Facultad de Economía. Universidad de Los Andes.

THE ECONOMICS OF AGRICULTURAL PRODUCTION GOODS

Abstract

The main objective of this document is to show the theoretical and operative framework of the economy of agricultural goods. In the theoretical framework the microeconomic principles are related with the production and costs of agricultural goods and the theory of the duality.

The empirical or applied part of the document is centered on the estimation of econometric models of the production functions most commonly used in agriculture. From the estimated models, the most important concepts of the economical analysis of agricultural production are derived and represented graphically.

The databases have been built from agricultural experiments of the Agricultural Research Centers of Colombia and Mexico.

Finally, this document aims to contribute to the beginning of a set of publications of the results of different studies related to agricultural economics done in the Masters Degree Program in Environmental and Natural Resources (PEMAR) of the Faculty of Economics – Universidad de Los Andes,

Key words: agricultural economics, production economics, duality theory

JEL classification: E23, Q12

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCION

El presente documento muestra aspectos temáticos generales de la teoría de la producción con especial énfasis en aplicaciones de la economía agrícola. Se presentan los procedimientos de cálculo y estimación de las expresiones más utilizadas en la aplicación empírica de la teoría de la producción y de la teoría de la firma. Se desarrolla la teoría estándar y la manera de estimar modelos teóricos con diferentes formas funcionales mediante el uso de herramientas econométricas, así como la representación gráfica de las funciones estimadas. El documento cuenta con ejercicios que le permiten al estudiante afianzar los conceptos vistos en cursos previos y replicar las estimaciones propuestas[5].

El documento se encuentra dividido en ocho secciones. La primera presenta la definición de la economía agrícola, resaltando su importancia en el desarrollo agrícola e industrial. La segunda relaciona la economía agrícola con la ciencia económica, enfatizando en áreas como la microeconomía y la macroeconomía. La tercera trata los aspectos básicos de la teoría microeconómica de la producción. La cuarta presenta la función de beneficios y sus propiedades. La quinta muestra los tipos de funciones de producción comúnmente trabajados en economía agrícola. La sexta trata la teoría de la función de costos y sus propiedades. La séptima introduce la teoría de la dualidad y la octava presenta una breve descripción de las aplicaciones de la dualidad entre la producción y el costo.

1. LA ECONOMÍA AGRÍCOLA

Los entes privados y públicos han mostrado un creciente interés por estudios económicos en los que se analicen aspectos relacionados con: la forma como se utilizan los recursos para la producción de los bienes agrícolas dentro de un esquema de sostenibilidad económica y ambiental; el conflicto entre los sectores urbano y rural por el uso recursos, principalmente agua, suelo y bosques; y el impacto en el bienestar de los productores y consumidores ante medidas de política, especialmente las relacionadas con la globalización de la economía.

La ciencia que se encarga del estudio de las leyes económicas que garantizan la mejor asignación de bienes y recursos en la agricultura es la economía agrícola. Esta ciencia tiene como finalidad asignar recursos escasos a usos adecuados y “eficientes” de factores productivos para las actividades agrícolas, forestales, ganaderas y de pesca. La economía agrícola desarrolla actividades de regulación que tienen en cuenta las características de cada sector, como por ejemplo la evolución de la mano de obra, la incidencia del capital en la productividad, y las técnicas aplicadas en el proceso y en el desarrollo tecnológico.

A continuación se citan algunas razones por las cuales la agricultura juega un papel importante en el desarrollo de un país:

[5] Se agradece el apoyo de Ramon’s Claude Jean Philippe en la edición del documento.

a) El sector agrícola es primordial por ser el encargado de la oferta de alimentos y materias primas para la industria y para los trabajadores urbanos. Cambios en la agricultura que afecten la oferta pueden ocasionar perturbaciones en los otros sectores de la economía. La oferta de bienes agrícolas para el consumo final e intermedio es un instrumento importante de los gobiernos en el control de la inflación.

b) El sector agrícola absorbe una gran cantidad de trabajadores y es la fuente de la fuerza trabajo para la industrialización. Al incrementarse la productividad agrícola se ofrecen trabajadores a la industria sin quebrantar seriamente la oferta de alimentos y materias primas.

c) En las etapas iniciales del desarrollo económico de un país, la industria necesita divisas para importar maquinaria y materias primas que éste no puede producir internamente, así la agricultura a partir de productos primarios, se convierte en la fuente principal de los ingresos por exportaciones. Un plan de desarrollo o programa de industrialización requiere considerables sumas de inversión, en tanto que una gran participación del ingreso nacional se genera en la agricultura; siendo ésta una fuente principal de ahorros para la economía.

d) En la medida que exista un sector agrícola próspero, éste podrá abastecer las necesidades del mercado industrial. La industria no puede desarrollarse eficientemente o ampliarse a un tamaño competitivo sin la participación del sector agrícola, a menos que haya un mercado industrial de gran escala.

e) Cuando un país inicia su industrialización, hay varias razones por las cuales es necesario incrementar la productividad agrícola:

    i) El sector agrícola abarca una población grande en los países menos desarrollados. Si la mano de obra debe desplazarse de la agricultura para ser incorporada en el sector industrial, la productividad agrícola debe mejorarse para facilitar su desplazamiento.

    ii) Un sector industrial creciente requiere una cantidad mayor de alimentos para los trabajadores industriales en la ciudad y una cantidad creciente de materias primas para las fábricas recién establecidas.

    iii) En las etapas iniciales, la industria realiza un incipiente intercambio con el extranjero, sin embargo se empieza a crear una fuerte demanda de él. La industria necesita el intercambio con el extranjero para la adquisición de maquinaria, tecnología y otros insumos que no se producen localmente.

    iv) Si un país no puede aumentar la productividad del sector agrícola, los términos de intercambio[6] cambiarán a favor de la agricultura y la industrialización se hará más costosa y difícil.

---

[6] Los términos de intercambio (TI) se refieren a la relación de precios domésticos entre los productos agrícolas (Pa) y los productos industriales (Pi): TI = Pa / Pi.

f) La participación más grande del ingreso nacional en los países menos desarrollados se genera en el sector agrícola. En este sentido, el sector que puede contribuir más, por su tamaño, para la implementación de un programa de desarrollo e industrialización, el cual requiere considerables fondos, es el agrícola. Un incremento en el ingreso agrícola por encima del nivel de subsistencia, suministrará el potencial y el nivel de ahorro requerido por la sociedad para realizar sus planes de inversión. Para que el aumento en el ingreso sea verdaderamente efectivo, éste debe reflejar un aumento de la productividad y no solamente un aumento en los precios.

g) La industria también necesita un mercado fuerte y bien desarrollado para operar y funcionar eficientemente. Hay muchas industrias que requieren un tamaño mínimo antes de poder acceder a la tecnología actual y lograr economías de escala. El grueso de la demanda industrial en países menos desarrollados es la población directamente vinculada a la agricultura. Si la gente en el sector agrícola no gana un ingreso muy por encima de su necesidad de subsistencia, no será capaz de formar el mercado que la industria necesita.

Los elementos descritos anteriormente permiten enfatizar la importancia del sector agrícola y su papel trascendental en el desarrollo económico de un país. En este sentido, el efectuar un análisis estructurado del comportamiento del sector productivo podrá generar un espacio para la proposición de recomendaciones de política que incentiven los determinantes de la productividad, su desarrollo y evolución.

2. LA ECONOMIA AGRÍCOLA Y SU RELACIÓN CON LA MICROECONOMÍA Y LA MACROECONOMÍA.

2.1. Relación de la Economía Agrícola con la Microeconomía.

Las decisiones de los productores y los consumidores de bienes agrícolas pueden verse afectadas por variables microeconómicas, impactando el bienestar económico de tales agentes. Las especializaciones que se encuentran dentro de la economía agrícola con mayor enfoque en la microeconomía, son:

- **Economía de la Producción:** se encarga del estudio del mercado de los factores de producción y del mercado del producto. La economía de la producción brinda los criterios y herramientas para determinar las cantidades óptimas de producción y de demanda de recursos.

- **Economía de Mercado:** Se ocupa del estudio de los flujos de recursos y de la producción. Cada mercado cuenta con características diferentes y éstas determinan la estructura en la cual se realizan las transacciones.

- **Economía de Finanzas:** Se ocupa del estudio del financiamiento de los negocios y proyectos. Busca brindar alternativas que se ajusten a la demanda de inversiones de los productores agrícolas, siendo los criterios básicos, el valor presente neto, relación beneficio-costo y la tasa interna de retorno del proyecto que permiten decidir su viabilidad o no.

- **Economía de los Recursos:** se ocupa del estudio del uso y la preservación de los recursos que se utilizan o son afectados por la actividad agrícola, teniendo en cuenta el ciclo de vida de estos y evaluando las posibilidades de su uso adecuado y la disposición final que permitan mejorar el desempeño de la firma. Esta área incluye el estudio del recurso hídrico, suelo, bosques y el uso de agroquímicos y sus impactos en los recursos y en la salud.

- **Economía de Política Agrícola:** Se encarga del estudio de las leyes agrarias que rigen y orientan la economía del país. La política agrícola sectorial permite mejorar el desempeño del sector orientándose a las políticas de créditos, de impuestos, de determinación de fronteras agrícolas y de legislación ambiental para el uso de agroquímicos, entre otros.

2.2. Relación de La Economía Agrícola con la Macroeconomía.

Las variables macroeconómicas cumplen un papel importante en la evolución de la economía agrícola para los países en desarrollo. Son resultado de la aplicación de la política monetaria o la política fiscal y forman parte de las variables determinantes del comercio internacional. Algunas de estas variables son: impuestos, subsidios, cuotas, tasas de cambio, inversión, ahorro y oferta monetaria.

2.3. Objetivo de los Agentes Económicos.

Según la rama de la economía, los agentes presentan objetivos particulares:

- **Economía del Consumo.** El objetivo del agente consumidor es la maximización de la utilidad.

- **Economía de la Producción.** El objetivo del agente productor es la maximización de los beneficios.

- **Economía de la Producción Agrícola.** De acuerdo con las relaciones presentes en la producción agrícola, a continuación se describe la conducta del productor agrícola:

a. *Objetivo del agricultor*. El productor tiene como objetivo maximizar sus beneficios. Por otro lado, paralelo a este objetivo el agricultor puede desear también la maximización de su producción.

b. *Escogencia de productos y asignación de recursos*. El agricultor elige los productos y asigna recursos dado un conjunto de restricciones: la tecnología, el capital y la mano de obra, etc.

c. *Riesgo e Incertidumbre*. Cuando se decide producir existe algún grado de vulnerabilidad, riesgo o incertidumbre, ya sea por su naturaleza, por actividades antrópicas y/o por decisiones de política del gobierno.

d. *Tipos de mercado y ambiente competitivo*. Existen efectos de las estructuras del mercado de la producción, las cuales pueden afectar tanto las relaciones de eficiencia en el uso de los factores productivos, como el mercado de factores. En sentido contrario, por alguna vía, el mercado de factores puede impactar el mercado de la producción.

3. TEORIA MICROECONOMICA DE LA PRODUCCIÓN

En este capítulo se describen las características más importantes de la tecnología, su enfoque teórico y formal desde la perspectiva económica y sus aplicaciones en la economía agrícola.

3.1. La Tecnología

La tecnología describe el conjunto de planes de posibilidades de producción, de uso de insumos y productos obtenidos que son factibles dado un estado de conocimientos. La tecnología puede representarse como:

$$Y = \{(\mathbf{y}, -\mathbf{x})\} = \{(y_1, y_2, ..., y_m, -x_1, -x_2, ..., -x_n)\}$$

Donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, es el vector de productos, para todo *i* = 1,2,...,m, y $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$, es el vector de insumos, para todo *k* = 1,2,...,n. De esta manera, Y representa el vector Producto – Insumo.

3.1.1. Descripción de la tecnología

Considérese una firma que produce un único bien a partir de n insumos. Su tecnología puede describirse de la siguiente forma:

i. Conjunto de posibilidades de producción: $Y = \{(y,-\mathbf{x}) \in \Re^{1+n} : y \leq f(\mathbf{x})\}$

Representa todas las relaciones producto-insumo que son tecnológicamente viables.

ii. Conjunto de requerimientos de insumos: $V(y) = \{\mathbf{x} \in \Re_+^{\,n} : (y;-\mathbf{x}) \in Y\}$

$V(y)$ representa la cantidad mínima de requerimiento de insumos para obtener un nivel de producción y.

iii. Isocuanta.

$Q(y) = \{\mathbf{x} \in \Re_+^n \,/\, \mathbf{x} \in V(y) \wedge \mathbf{x} \notin V(y'), \forall\, y' > y\}$

Es un subconjunto de $V(y)$ de nivel y. Indica todas las combinaciones de factores que generan al menos y unidades de producción.

iv. Función de producción

$f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Es el máximo nivel de producto asociado al vector de insumos $(-x_1,-x_2,...,-x_n)$ en el conjunto de posibilidades de producción Y.

<u>Ejemplo 1.</u>

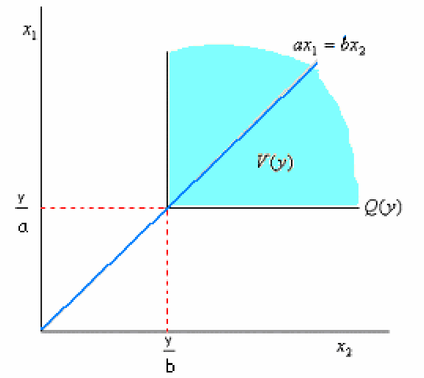
Sean $a > 0$ y $b > 0$ parámetros de la siguiente tecnología de producción:

$$Y = \{(y,-x_1,-x_2) \in \Re^3 : y \leq min\{ax_1, bx_2\}\}$$

A continuación se describe analíticamente el conjunto de requerimientos de insumos, la isocuanta y la función de producción:

Conjunto de requerimientos de insumos:	$V(y) = \{(x_1, x_2) \in \Re_+^2 : y \leq min\{ax_1, bx_2\}\}$
Isocuanta:	$Q(y) = \{(x_1, x_2) \in \Re_+^2 : y = min\{ax_1, bx_2\}\}$
Función de producción:	$f(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\}$

Figura No. 1. Representación gráfica de $V(y) = \{(x_1, x_2) \in \Re_+^2 : y \leq Min\{ax_1, bx_2\}\}$

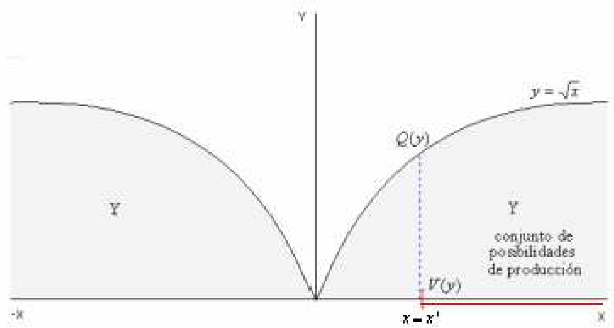


Ejemplo 2.

Para la función de producción $y = \sqrt{x}$, se describe analíticamente su tecnología:

Conjunto de posibilidades de producción:	$Y = \{ (y, -x) \in \Re^2 : y \leq \sqrt{x} \}$
Conjunto de requerimientos de insumos:	$V(y) = \{ x \in \Re^1_+ : y \leq \sqrt{x} \}$
Isocuanta:	$Q(y) = \{ x \in \Re^1_+ : y = \sqrt{x} \}$
Función de producción:	$f(x) = \sqrt{x}$

Figura No. 2. Representación gráfica de la función de producción: $y = \sqrt{x}$



Ejemplo 3.

Sean $a > 0$ y $b > 0$ parámetros de la siguiente tecnología de producción tipo Cobb-Douglas:

$$Y = \{ (y, -x_1, -x_2) \in \Re^3 : y \leq x_1^a x_2^b \}$$

La descripción de esta tecnología es como sigue:

Conjunto de requerimientos de insumos: $V(y) = \{(x_1, x_2) \in \Re_+^2 : y \leq x_1^a x_2^b\}$
Isocuanta: $Q(y) = \{(x_1, x_2) \in \Re_+^2 : y = x_1^a x_2^b\}$
Función de producción: $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$

3.1.2. Propiedades de la Tecnología de la Firma

La tecnología de una firma debe cumplir tres propiedades fundamentales: monotonicidad, convexidad y regularidad. La monotonicidad se refiere a que es posible la libre eliminación de insumos, de tal forma, que si es viable producir un nivel particular de producto con cierta magnitud de factores; con la utilización de una cantidad igual o mayor de insumos también es factible la producción de al menos la misma cantidad de producto. Por otro lado, la convexidad del conjunto de cantidades necesarias de factores es una propiedad que garantiza una función de producción cuasicóncava; característica importante en los procesos de optimización. Finalmente, un conjunto de requerimientos de insumos regular significa que este es cerrado y no vacío. Cuando el conjunto es cerrado, expresa que contiene su propia frontera y cuando es no vacío, manifiesta que hay alguna forma razonable de generar un nivel cualquiera de producción.

3.2. Función De Producción.

Para tomar la decisión de uso de factores o insumos por parte de la firma, es necesario contar con un buen instrumento que permita resumir las posibilidades de producción, es decir, las combinaciones de factores y de productos que son tecnológicamente viables. Estas combinaciones representan la tecnología, la cual se puede describir a través de la función de producción.

3.2.1. La Producción Total

La producción total de una empresa típica se encuentra representada mediante la ecuación de la función de producción:

$$y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Donde y es el producto y X_k el insumo k, para todo k = 1,...,n.

Por ejemplo, considérese una función de producción que depende solamente de dos insumos: trabajo (X_1) y capital $(\overline{X}_2)$, donde la cantidad de capital está fija en el corto plazo, pues la empresa durante este tiempo no puede duplicar sus máquinas y el tamaño de la planta, y adicionalmente, dicha firma se orienta a un mercado que demanda productos manufacturados (vestidos, artesanías, calzados, etc.). Bajo estas condiciones, para una empresa típica, la producción aumenta cuando crece la cantidad de trabajadores contratados. Analíticamente esta función de producción se expresa como: $y = f(X_1)$, donde $f(X_1)$ puede ser reemplazada por una especificación en particular. Un ejemplo de esta especificación es la siguiente:

$$y = a_1 X_1^2 + a_2 X_1^3 \text{ , donde } a_1 > 0 \text{ y } a_2 < 0$$

Esta función de producción depende de un solo factor variable y puede ser representada gráficamente en el primer cuadrante del plano cartesiano. Cuando se plantean funciones de producción más complejas, donde existen múltiples insumos variables, éstas pueden graficarse en el plano, eligiendo un factor de interés, y sustituir los factores restantes por su valor promedio en la serie de datos.

3.2.2. La Productividad Marginal de Factores (Pmg.)

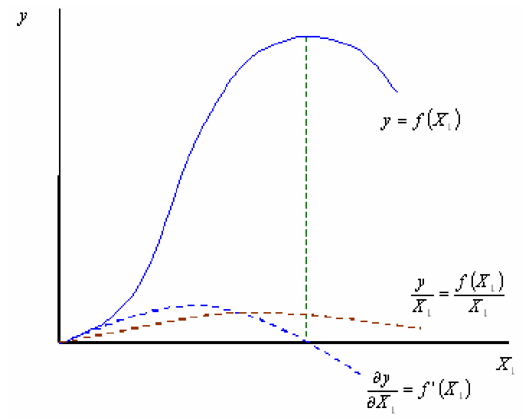
La productividad marginal de un factor representa la magnitud en que contribuye una unidad adicional del insumo al producto total. Esta se calcula como la derivada parcial de la función de producción con respecto al factor: $PmgX_k = \partial y / \partial X_k$

3.2.3. La Productividad Media de Factores (Pme):

La productividad media de un factor es el número promedio de unidades producidas por unidad de insumo. Esta se obtiene dividiendo la producción total entre el factor productivo: $PmeX_k = y/X_k$

La siguiente gráfica muestra la relación entre los tres conceptos anteriores: la producción total, la productividad marginal y la productividad media respecto al factor X_1.

Figura No. 3. Función de producción neoclásica.



3.2.4. Escala de Producción.

Cuando una empresa duplica simultáneamente el uso de sus factores y el volumen de su producción aumenta en la misma proporción, como si la fábrica contara con una planta gemela, a su lado, y se sumaran sus producciones, se dice que la firma presenta una tecnología con rendimientos constantes a escala. Por otro lado, si la producción resultante de esta duplicación de los factores es mayor o menor que el doble de la producción inicial, la tecnología exhibe rendimientos crecientes o decrecientes a escala, respectivamente.

Es importante preguntarse ¿Qué ha sucedido con la relación capital por trabajador (K/L) en estos tres tipos de rendimientos a escala? Pues la relación K/L, que representa el cociente entre las magnitudes de factores, no ha sido alterada debido al aumento proporcional en cada uno de los insumos. Cabe anotar que aunque la relación K/L se mantenga estable, los factores pueden convertirse en más o menos productivos dependiendo del tipo de rendimientos que exhibe la tecnología.

3.2.5. Elasticidad de Producción.

La elasticidad de producción mide el cambio porcentual en el nivel de producción cuando cambia en una unidad porcentual la magnitud del insumo o factor. A continuación se representa la elasticidad de producción del factor X_k:

$$\varepsilon_{y,X_k} = \frac{\partial y}{\partial X_k}\frac{X_k}{y} = \frac{PmgX_k}{PmeX_k}$$

3.2.6. Elasticidad de Escala o Elasticidad Total de Producción.

La elasticidad de escala o elasticidad total de producción mide el cambio porcentual en el nivel de producción cuando cambian de manera simultánea y porcentualmente los insumos en la misma cantidad. Se calcula como la suma de las elasticidades de producción respecto a los insumos. Para el caso de dos insumos, X_1 y X_2, la elasticidad de escala toma la forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_{y,X_1} + \varepsilon_{y,X_2}$$

donde:

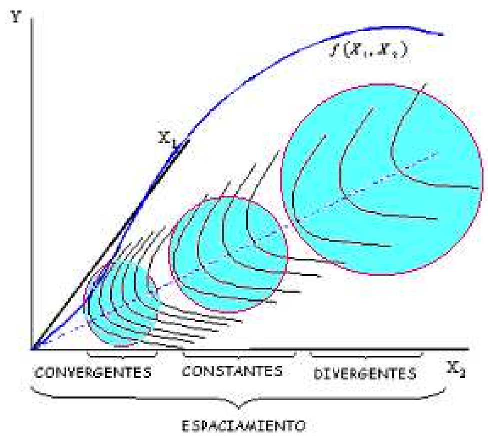
$$\varepsilon_{y,X_1} = \frac{\partial y}{\partial X_1}\frac{X_1}{y} = \frac{PmgX_1}{PmeX_1} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_{y,X_2} = \frac{\partial y}{\partial X_2}\frac{X_2}{y} = \frac{PmgX_2}{PmeX_2}$$

La elasticidad de escala esta relacionada con los rendimientos que presenta la tecnología. Así, cuando $\varepsilon = 1$ la función de producción exhibe retornos a escala constantes, mientras que si $\varepsilon < 1$ o $\varepsilon > 1$, los rendimientos de la tecnología son decrecientes o crecientes, respectivamente.

3.2.7. Isocuanta.

La isocuanta representa todas las combinaciones de factores que generan exactamente "y" unidades de producción. Las isocuantas se pueden clasificar según su espaciamiento: convergentes cuando la productividad marginal de la producción es creciente, divergentes cuando la productividad marginal es decreciente, y constante cuando la productividad marginal se mantiene estable. El espaciamiento de las isocuantas puede asociarse además al tipo de rendimientos a escala que exhibe la tecnología: crecientes, constantes o decrecientes cuando las isocuantas son convergentes, constantes o divergentes, respectivamente. A continuación se presentan gráficamente los tres tipos de espaciamiento de las isocuantas:

Figura No. 4. Espaciamiento de las isocuantas.



3.2.8. Optimización.

La firma puede conocer su máximo nivel de producción, de acuerdo con la tecnología disponible y sin considerar las restricciones de mercado. Dicho valor es conocido en la teoría económica como el producto máximo físico. Por otro lado, cuando las restricciones de mercado son incorporadas, la firma tiene como interés maximizar su beneficio económico sujeto a la tecnología de producción. La solución a este problema de optimización se conoce como óptimo económico.

3.2.9. Tasa Marginal de Sustitución Técnica de Factores.

La tasa marginal de sustitución técnica de factores mide la proporción de sustitución entre los insumos o factores productivos a lo largo de una isocuanta. Su expresión analítica esta representada por la pendiente de la isocuanta.

Diferenciando la función de producción $y = f(X_1, X_2)$ con respecto a los insumos X_1 y X_2:

$$dy = 0 = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} dX_2 \Rightarrow \mathrm{f}_1 dX_1 + \mathrm{f}_2 dX_2 = 0$$

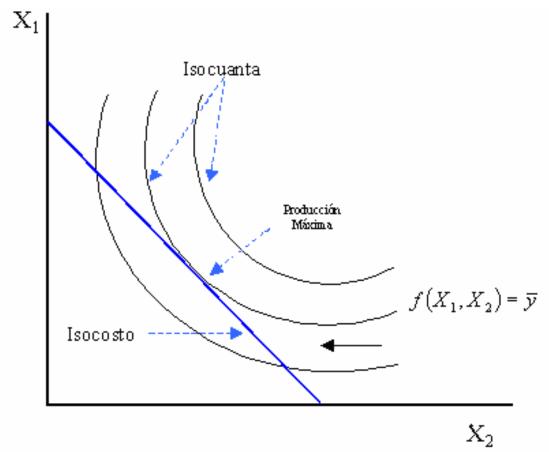
$$\frac{dX_1}{dX_2} = -\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}_1}$$

3.2.10. Isocosto.

La curva de isocosto se define dado un nivel de precios de los factores[7], las diferentes combinaciones de insumos que generan el mismo costo. Es la línea de costo constante que restringe a la función de producción, es decir es el presupuesto con que cuenta el productor para adquirir los factores.

El máximo nivel de producción sujeto a la restricción de presupuesto se encuentra en el punto donde la isocuanta es tangente a la recta de isocosto. Este punto se interpreta como el nivel óptimo de producción que minimiza el costo de producción.

Figura No. 5. La recta isocosto



3.2.11. Elasticidad de sustitución.

Mide la variación porcentual del cociente entre los factores respecto a la variación porcentual de la tasa marginal de sustitución, manteniéndose fijo el nivel de producción. La elasticidad de sustitución es una medida de la curvatura de la pendiente de la isocuanta. Por ejemplo, si una pequeña variación de la pendiente provoca una gran variación del cociente entre las cantidades de factores, se presenta un alto valor de la elasticidad de sustitución y la isocuanta se torna relativamente horizontal. La fórmula de cálculo se presenta a continuación:

7 Se considera que los precios son exógenos, por lo tanto el productor es un agente tomador de precios.

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{X_2}{X_1}\right) \Big/ \left(\frac{X_2}{X_1}\right)}{d(TMST)/TMST}$$

La elasticidad de sustitución σ varia entre 0 y ∞. Una σ = 0 indica que los factores son complementarios perfectos, mientras que una σ → ∞ representa factores de producción que son sustitutos perfectos o netos.

3.2.12. Isoclina.

Isoclina es la línea que une puntos de igual pendiente de las isocuantas, es decir, las isoclinas representan el conjunto de puntos que tienen la misma tasa marginal de sustitución. Estas líneas permiten acotar y diferenciar las etapas de producción.

- **Líneas de Racionalidad Técnica (Ridge Line)**. Línea de acotamiento de óptimos físicos. Divide las etapas II y III de producción. Mide el nivel de producción que se obtiene si el objetivo es maximizar el nivel de uso de los factores. La expresión analítica se obtiene cuando la productividad marginal de los factores es igual a cero[8]: $PmgX_1 = 0$ y $PmgX_2 = 0$.

- **Líneas de racionalidad económica (Pseudo Scale Line)**. Isoclina que indica el óptimo económico. También definido como las líneas de acotamiento para los óptimos económicos. Al igual que las líneas de racionalidad técnica, las líneas de racionalidad económica muestran el nivel de producción que se obtiene si el objetivo es minimizar el costo o maximizar el beneficio, sujetos a la restricción tecnológica. Las ecuaciones de las líneas de óptimo económico parcial se encuentran al igualar el valor de la productividad marginal de los factores a sus costos marginales o precios de los insumos[9]:

$$PmgX_1 = \frac{w_1}{p} \text{ y } PmgX_2 = \frac{w_2}{p}$$

- **Senda de Expansión**. Une los puntos de tangencia entre la isocuanta y la recta de isocosto. Indica la senda de evolución del máximo nivel de producción cuando se realizan diferentes combinaciones óptimas de los factores productivos. La expresión analítica de la senda de expansión se deriva de la condición de maximización de producción sujeta al costo, donde la tasa marginal de sustitución técnica de factores es igual a la tasa marginal de sustitución económica (relación de precios):

$$\frac{PmgX_1}{PmgX_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

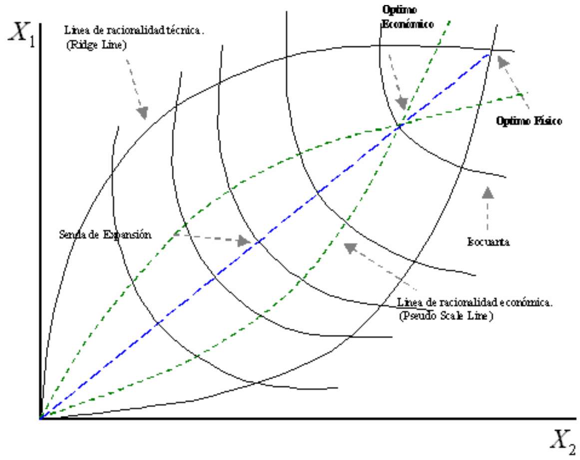
---

8 Condición de primer orden del problema de maximización del nivel de producción.

9 Condición de primer orden del problema de minimización de costos de producción o maximización de beneficios.

La siguiente figura muestra las líneas de racionalidad técnica y económica, y la senda de expansión de una función de producción que depende de dos insumos, X_1 y X_2:

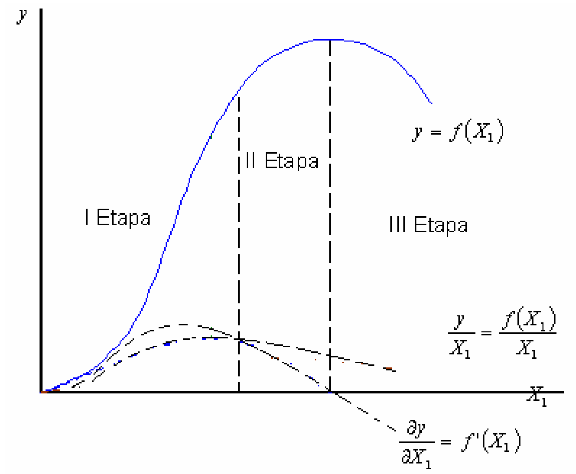
Figura No. 6. Líneas de racionalidad técnica y económica, y la senda de expansión



3.2.13. Etapas de Producción

En la teoría económica de la producción se distinguen tres etapas de producción. La primera etapa se caracteriza por un producto marginal mayor al producto medio; y finaliza cuando estas expresiones se hacen iguales. Por otro lado, en la segunda y tercera etapa de producción, el producto medio se encuentra por encima del producto marginal. En particular, la segunda etapa se extiende hasta que el producto marginal es igual a cero, de allí en adelante se presenta la etapa tres, siendo su principal característica el producto marginal negativo. Es importante mencionar que no todas las funciones de producción cuentan con las tres etapas descritas. A continuación se muestran gráficamente las etapas de producción:

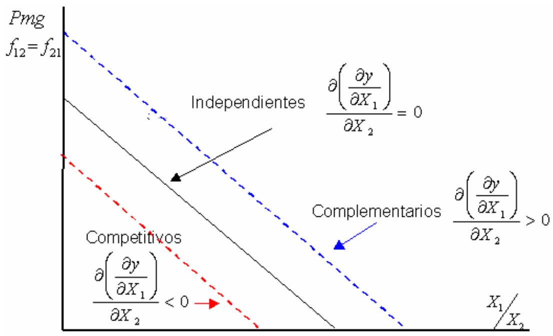
Figura No. 7. Etapas de producción.



3.2.14. Interdependencia de Factores

Los factores de producción pueden ser técnicamente independientes, complementarios o competitivos. Son técnicamente independientes cuando el producto marginal de un factor no es afectado por el incremento de otro insumo. Por otro lado, los factores son técnicamente complementarios o técnicamente competitivos, si el producto marginal de un insumo se incrementa o decrece por el aumento del otro factor, respectivamente.

Figura No. 8. Interdependencia de factores.



4. LA FUNCIÓN DE BENEFICIOS

La función de beneficios es la solución al problema de maximización de la diferencia entre los ingresos totales y costos totales sujeta a la tecnología. El planteamiento analítico del problema de maximización de beneficios (PMB) para una firma que produce un único bien a partir de n insumos es el siguiente:

$$\underset{\mathbf{x}}{Max} \quad \Pi = py - \mathbf{w}.\mathbf{x} = py - w_1x_1 - w_2x_2 - w_3x_3 - ... - w_nx_n$$

$$\text{sujeto a} \quad y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

Donde p es precio del producto y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ el vector de precios de los factores, para todo k = 1,2,...,n; magnitudes que son exógenas, las cuales se determinan en el mercado.

A continuación se presentan la condición de primer[10] (CPO) y segundo orden[11] (CSO) del PMB:

- CPO: $\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} = p\frac{\partial f}{\partial x_k} - w_k = 0$, para todo k = 1,2,...,$n$.
- CSO: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \leq 0$

A partir de la CPO es posible obtener el vector: $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*)$, denominado vector de demanda de factores. Posteriormente, la sustitución de las funciones de demanda óptimas en la función de producción permite encontrar la función de oferta: $y^* = y^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*)$. La función de beneficios puede obtenerse al reemplazar $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*)$ y $y^* = y^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*)$ en la función objetivo. Todas estas funciones son expresadas en términos de las variables exógenas:

Función de demanda:	$x_k^* = x_k^*(p, \mathbf{w})$, para todo k = 1,2,...,$n$.
Función de oferta:	$y^* = y^*(p, \mathbf{w})$
Función de beneficios:	$\Pi^* = \Pi^*(p, \mathbf{w})$

10 La CPO indica igualdad entre el ingreso marginal y el costo marginal de producción.

11 La CSO expresa la necesidad de funciones de producción con concavidad para la maximización de beneficios.

Ejemplo 4.

Se desea maximizar los beneficios de una firma cuya tecnología esta representada por la siguiente función de producción: $f(x) = x^a$, donde $a < 1$.

$$Max_x \quad \Pi = py - wx \qquad \text{sujeto a:} \qquad y = x^a$$

$$Max_x \quad \Pi = px^a - wx$$

CPO: $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \quad pax^{a-1} - w = 0$

Función de demanda: $x^* = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$

Función de oferta: $y^* = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{a}{a-1}}$

Función de beneficios: $\Pi(\ p\ ) = p\left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{a}{a-1}} - w\left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}} = \left(\frac{1-a}{a^{\frac{a}{a-1}}}\right)\left(\frac{w^a}{p}\right)^{\frac{1}{a-1}}$

4.1. Propiedades de la función de beneficios

La función de beneficios presenta las siguientes propiedades:

i. $\Pi(\ p,\mathbf{w}\ )$, es no decreciente en p y no creciente en $\mathbf{w}$.
ii. $\Pi(\ p,\mathbf{w}\ )$ es homogénea de grado uno en los precios: $\Pi(\ tp,t\mathbf{w}\ ) = t\Pi(\ p,\mathbf{w}\ )$, $\forall t \geq 0$.
iii. $\Pi(\ p,\mathbf{w}\ )$, es convexa en los precios.
Sea $\mathbf{p} = (p,\mathbf{w})$. Para todo $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}$’, si $\mathbf{p}$’’ = t $\mathbf{p}$ + $(1-t)\mathbf{p}$’, cualquiera que sea t, tal que 0 ≤ t ≤ 1, la nueva función de beneficios es:
$$\Pi\ (\mathbf{p}'') \leq t\ \Pi(\ \mathbf{p}) + (1-t)\Pi\ (\mathbf{p}')$$
iv. $\Pi(\ p,\mathbf{w}\ )$, es continua en los precios.

4.2. Lema de Hotelling.

Dada la siguiente función de beneficios:

$$\Pi(p,\mathbf{w}) = \underset{x}{Máx}\ p.f(\ \mathbf{x}\ ) - \mathbf{w.x}$$

Derivando la expresión con respecto al precio del producto y a los precios de los factores, y evaluando en el óptimo se tiene:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = f(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*(p,\mathbf{w})} = y^*(p,\mathbf{w}) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial w_k} = -x_k\Big|_{\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*(p,\mathbf{w})} = -x_k^*(p,\mathbf{w})$$

Estas dos ecuaciones se conocen como el lema de Hotelling para la oferta y la demanda, respectivamente.

__Ejemplo 5__

Encontrar la función de beneficios, verificar sus dos primeras propiedades y aplicar el lema de Hótelling, a partir de la siguiente tecnología de producción:

$$f(x_1, x_2) = a_1 Lnx_1 + a_2 Lnx_2$$

Se inicia el proceso encontrando la función de beneficios:

$$\underset{x_1,x_2}{Máx} \quad p.f(x_1,x_2) = p(a_1 Lnx_1 + a_2 Lnx_2) - w_1x_1 - w_2x_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden:

$$p\frac{a_1}{x_1} - w_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1^* = p\frac{a_1}{w_1}$$

$$p\frac{a_2}{x_2} - w_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2^* = p\frac{a_2}{w_2}$$

1. La función de beneficios:

$$\Pi(p,\mathbf{w}) = p\left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1}\right) + a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2}\right)\right] - w_1\left(p\frac{a_1}{w_1}\right) - w_2\left(p\frac{a_2}{w_2}\right)$$

$$\Pi(p,\mathbf{w}) = p\left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1}\right) + a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2}\right)\right] - pa_1 - pa_2$$

2. Propiedades:

a. $\Pi(p,\mathbf{w})$ no es decreciente en p y no creciente en $\mathbf{w}$.

Con respecto a p:

$$\frac{\partial \Pi(p,\mathbf{w})}{\partial p}=\left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1}\right)+a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2}\right)\right]+p\left[a_1\frac{1}{\frac{pa_1}{w_1}}\frac{a_1}{w_1}+a_2\frac{1}{\frac{pa_2}{w_2}}\frac{a_2}{w_2}\right]-a_1-a_2$$

$$=\left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1}\right)+a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2}\right)\right]+\left[a_1+a_2\right]-\left[a_1+a_2\right]$$

$$=\left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1}\right)+a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2}\right)\right]>0$$

Con respecto a w_1 y w_2:

$$\frac{\partial \Pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_1}=p\left[a_1\frac{1}{\frac{pa_1}{w_1}}\left(-\frac{pa_1}{w_1^2}\right)\right]=-\frac{pa_1}{w_1}=-x_1<0$$

$$\frac{\partial \Pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_2}=p\left[a_2\frac{1}{\frac{pa_2}{w_2}}\left(-\frac{pa_2}{w_2^2}\right)\right]=-\frac{pa_2}{w_2}=-x_2<0$$

b. $\Pi(p,\mathbf{w})$ es homogénea de grado uno en los precios:

$$t\Pi(p,\mathbf{w})=\Pi(tp,t\mathbf{w})=tp\left[a_1 Ln\left(\frac{tpa_1}{tw_1}\right)+a_2 Ln\left(\frac{tpa_2}{tw_2}\right)\right]-tpa_1-tpa_2$$

$$t\Pi(p,\mathbf{w})=\Pi(tp,t\mathbf{w})=t\left\{p\left[a_1 Ln\left(\frac{pa_1}{w_1}\right)+a_2 Ln\left(\frac{pa_2}{w_2}\right)\right]-pa_1-pa_2\right\}$$

3. Evaluando el lema de Hotelling:

a. Función de oferta:

$$\frac{\partial \Pi(p,\mathbf{w})}{\partial p} = y^*(p,\mathbf{w}) = \left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1} \right) + a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2} \right) \right]$$

$$+ \; p\left[a_1 \frac{1}{\frac{pa_1}{w_1}} \frac{a_1}{w_1} + a_2 \frac{1}{\frac{pa_2}{w_2}} \frac{a_2}{w_2} \right] - a_1 - a_2$$

$$y^*(p,\mathbf{w}) = \left[a_1 Ln\left(p\frac{a_1}{w_1} \right) + a_2 Ln\left(p\frac{a_2}{w_2} \right) \right]$$

b. Función de demanda:

$$\frac{\partial \Pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_1} = p\left[a_1 \frac{1}{\frac{pa_1}{w_1}} \left(-\frac{pa_1}{w_1^2} \right) \right] = -\frac{pa_1}{w_1} = -x_1^*$$

$$\frac{\partial \Pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_2} = p\left[a_2 \frac{1}{\frac{pa_2}{w_2}} \left(-\frac{pa_2}{w_2^2} \right) \right] = -\frac{pa_2}{w_2} = -x_2^*$$

5. FUNCIONES DE PRODUCCION.

Una función de producción describe la relación técnica que transforma insumos o factores en productos. De acuerdo con la definición matemática de función, esta es una regla de asignación donde a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde solo un elemento del conjunto de llegada. El conjunto de partida recibe el nombre de dominio de la función, el cual en este caso está representado por todos los valores posibles de los insumos o factores. El conjunto de llegada se conoce como el rango de la función o codominio, y esta constituido por el conjunto de valores posibles del producto.

Las funciones de producción pueden tener variadas especificaciones: cuadrática, cúbica, raíz cuadrada, Cobb-Douglas, Leontief, CES, transcendental y translogarìtmica, entre otras. En la economía agrícola todo investigador supone inicialmente una forma particular de la función de producción, cuya especificación obedece al conocimiento teórico que se tiene de las relaciones entre los factores y el producto. Muchas veces la función de producción que se plantea no se encuentra completamente especificada, es decir, no se conoce el valor de todos los parámetros que la conforman. Sin embargo, herramientas como la estimación econométrica, la programación matemática o los métodos de simulación permiten la obtención de funciones de producción especificadas de forma completa, e inclusive, a partir de la econometría existe la posibilidad de probar las hipótesis iniciales del investigador. Adicionalmente, características teóricas de la función de producción como la continuidad y doble derivabilidad se desean conservar también en la práctica. Esta sección describe diferentes especificaciones de la función de producción de una firma típica a partir de dos insumos.

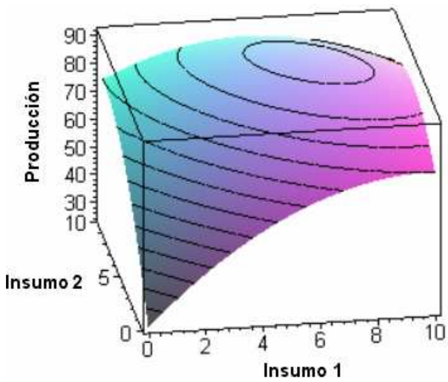
5.1. Función de Producción Cuadrática.

La función de producción cuadrática se caracteriza por la existencia de una relación no lineal entre los factores y la producción. A diferencia de la función lineal, esta especificación permite la obtención de una productividad marginal de los factores no constante. La función de producción cuadrática tiene la forma:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + 0.5 b_1 X_1^2 + 0.5 b_2 X_2^2 + b_3 X_1 X_2$$

La siguiente figura muestra en tres dimensiones la representación gráfica de la función cuadrática:

Figura No. 9. Función de producción cuadrática.



5.1.1. Características Generales

La función cuadrática cuenta con las siguientes características:

- **Estricta Concavidad**. La función presenta estricta concavidad cuando se cumplen las siguientes desigualdades:

$$b_1 b_2 > b_3^2 \,;\; b_1 < 0 \,;\; b_2 < 0 \,;\; a_1 > 0 \,;\; a_2 > 0$$

Es importante anotar, que el cumplimiento de estas expresiones garantiza la racionalidad de uso de los factores.

- **Estricta Cuasiconcavidad**. Ante la ausencia de estricta concavidad, la función puede ser cuasicóncava con óptimo local.

- **Homogeneidad**. La función de producción cuadrática no presenta homogeneidad.

- **Elasticidad de Producción**. La elasticidad de producción de esta función depende del nivel de uso de insumos. La elasticidad respecto al insumo X_1 tiene la forma:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i}\frac{X}{Y} = \frac{a_i X_i + b_i X_i^2 + b_3 X_i X_l}{a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + 0.5 b_1 X_1^2 + 0.5 b_2 X_2^2 + b_3 X_1 X_2}$$

- **Elasticidad Total o Elasticidad Escala**. La elasticidad de escala es variable: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

- **Elasticidad de Sustitución (σ).** La elasticidad de sustitución no es constante y la ecuación que la describe es compleja en su representación.

- **Isocuantas**. La pendiente, convexidad y espaciamiento de las isocuantas se evalúa de la siguiente manera:

  a. *Pendiente*. Las isocuantas tienen forma de elipse. En ese sentido, existen puntos de pendiente positiva, negativa, cero e infinita.

  b. *Convexidad*. Las isocuantas son convexas con respecto al origen.

  c. *Espaciamiento*. Cuando $a_i b_i > 0$, las isocuantas convergen, mientras que si $b_i < 0$ las isocuantas divergen, para todo i =1,2.

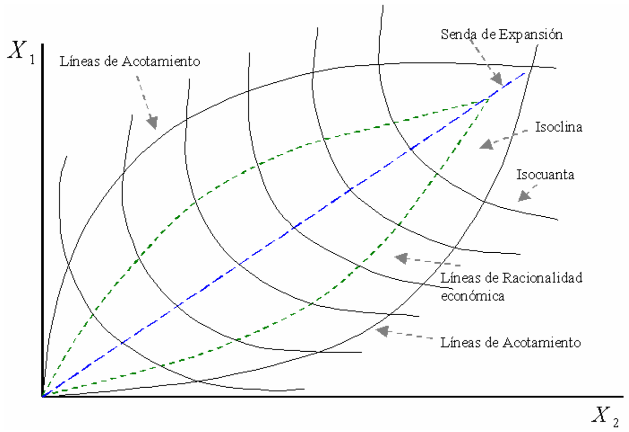
- **Independencia Técnica**. Para identificar la interrelación de los factores, se requiere verificar el signo del coeficiente de interacción de los insumos:

  $b_3 > 0$ Factores técnicamente complementarios.
  $b_3 = 0$ Factores técnicamente independientes.
  $b_3 < 0$ Factores técnicamente competitivos.

- **Líneas de Acotamiento o de Racionalidad Técnica**. De acuerdo con los resultados de interdependencia de factores, se puede identificar el tipo de pendiente de las líneas de acotamiento: i) las líneas de acotamiento tienen pendiente positiva cuando los factores son técnicamente complementarios,

ii) las líneas de acotamiento son rectangulares si los factores son técnicamente independientes, y iii) las líneas de acotamiento tienen pendiente negativa cuando los factores son técnicamente competitivos.

Figura No. 10. Líneas de acotamiento, líneas de racionalidad económica y senda de expansión.



- **Etapas de Producción**. La función presenta las etapas de producción II y III para cada factor individual y para la escala cuando la función es estrictamente cóncava. Por otro lado, presenta la etapa I solamente, o las etapas II y III para cada factor individual y para la escala si la función es estrictamente cuasicóncava.

Ejemplo 6.

Se tiene la siguiente función de producción que relaciona el uso de Nitrógeno (X1) y fósforo (X2) que intervienen en la producción de Maíz (Y):

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_1^2 + a_4 X_2^2 + \varepsilon$$

Halle las expresiones matemáticas de óptimo físico, isocuantas, líneas de racionalidad técnica, líneas de racionalidad económica, senda de expansión y la tasa marginal de sustitución técnica.

a. Optimo Físico.

Para nitrógeno: $PMg_{X_1} = a_1 + 2a_3 X_1 = 0, \quad X_1 = -\dfrac{a_1}{2a_3}$

Para fósforo: $PMg_{X_2} = a_2 + 2a_4\ X_2\ = 0\,,\quad X_2 = -\dfrac{a_2}{2a_4}$

b. Isocuantas.

Las isocuantas están representadas por la siguiente expresión:

$$X_2 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4\left(a_0 + a_1X_1 + a_3X_1^2 - \bar{Y}\right)}}{2a_4}$$

c. Líneas de racionalidad técnica.

Línea de acotamiento para X_1: $PMg_{X_1} = \alpha_1 + 2\alpha_3 X_1 = 0\ ,\quad X_1 = -\dfrac{a_1}{2a_3}$

Línea de acotamiento para X_2: $PMg_{X_2} = a_2 + 2a_4P = 0\ ,\quad X_2 = -\dfrac{a_2}{2a_4}.$

d. Líneas de racionalidad Económica.

Sean P_Y, r_1 y r_2, el precio del maíz, del nitrógeno y el fósforo, respectivamente:

Líneas de racionalidad económica: $X_1 = \dfrac{r_1}{2a_3P_Y} - \dfrac{a_1}{2a_3}$ y $X_2 = \dfrac{r_2}{2a_4P_Y} - \dfrac{a_2}{2a_4}$

e. Senda de expansión

$$X_2 = \frac{r_2a_1 - r_1a_2}{2r_1a_4} + \frac{r_2a_3}{r_1a_4}X_1 \qquad \text{o} \qquad X_1 = \frac{r_1a_2 - r_2a_1}{2r_2a_3} + \frac{r_1a_4}{r_2a_3}X_2$$

f. Tasa marginal de sustitución: $TMS_{X_1,X_2} = -\dfrac{PMg_{X_1}}{PMg_{X_2}} = \dfrac{-a_1 - 2a_3X_1}{a_2 + 2a_4X_2}$

5.1.2. Estimación Econométrica de la Función Cuadrática.

En esta sección se presenta la estimación econométrica y algunas gráficas más representativas de una función de producción cuadrática (FPC). A partir de la base de datos "Agrícola.xls", cuya información aparece en el anexo 1 se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla No. 1. Estimación de una función de producción cuadrática[12].

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 03/01/02 Time: 21:56
Sample: 1 121
Included observations: 121

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000000	4.68E-15	0.000000	1.0000
N	1.400000	1.60E-16	8.73E+15	0.0000
P	1.800000	1.60E-16	1.12E+16	0.0000
N^2	-0.010000	1.54E-18	-6.47E+15	0.0000
P^2	-0.010000	1.54E-18	-6.47E+15	0.0000

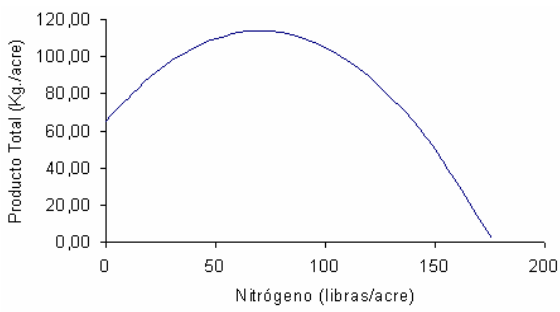
R-squared	1.000000	Mean dependent var	90.00000
Adjusted R-squared	1.000000	S.D. dependent var	31.04781
S.E. of regression	1.50E-14	Sum squared resid	2.61E-26
F-statistic	1.28E+32	Durbin-Watson stat	0.229197
Prob(F-statistic)	0.000000		

La ecuación de la función cuadrática estimada es la siguiente:

$$Y = 1.4N + 1.8P - 0.01N^2 - 0.01P^2$$

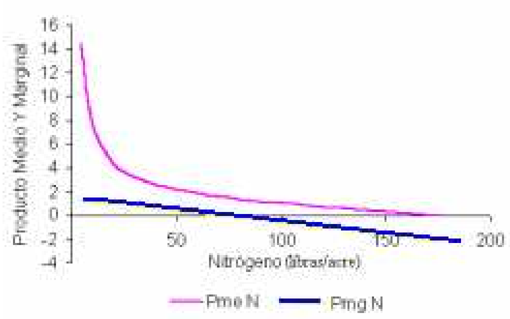
Esta función presenta las etapas II y III de producción debido a su estricta concavidad. A continuación se muestra la representación gráfica del producto total, el producto medio y marginal, y la isocuanta:

Figura No. 11. Producción de maíz. FPC



12 El modelo muestra no significancia estadística para el intercepto. Debido a que la base de datos ha sido simulada, el R2 de la estimación es uno. Los t estadísticos muestran una alta relevancia de las variables (N, P, N2 y P2). Puede observarse que existe dependencia estadística.

Figura No. 12. Producto medio y producto marginal de la FPC de maíz



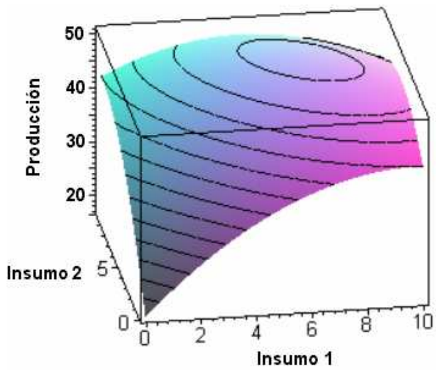
5.2. Función de Producción de Raíz Cuadrada.

La función de producción de raíz cuadrada es comúnmente utilizada por sus propiedades similares con la función de producción cuadrática. En particular, su especificación se diferencia de la función cuadrática porque los factores de producción se expresan en forma de raíces cuadradas. La función de producción de raíz cuadrada toma la forma:

$$Y = b_1 + b_2 X_1 + b_3 X_2 + b_4 X_1^{1/2} + b_5 X_2^{1/2} + b_6 X_1^{1/2} X_2^{1/2}$$

La siguiente figura muestra en tres dimensiones la representación gráfica de la función de raíz cuadrada:

Figura No. 13. Función de producción de raíz cuadrada.



5.2.1. Características Generales

La función de producción de raíz cuadrada presenta las siguientes características:

- **Estricta Concavidad**. Se presenta estricta concavidad globalmente cuando $b_4, b_5, b_6 > 0$; y estrictamente cóncava localmente si $b_6 < 0$; y $b_4, b_5 > 0$, $b_2, b_3 < 0$.

- **Estricta Cuasiconcavidad**. Sin estricta concavidad, la función puede ser cuasicóncava localmente.

- **Homogeneidad**. Al igual que el modelo cuadrático esta función no es homogénea.

- **Elasticidad de Producción**. La elasticidad de producción para cada factor productivo es variable.

- **Elasticidad Total**. La elasticidad total depende del nivel utilización de insumos.

- **Elasticidad de Sustitución**. La elasticidad de sustitución de la función raíz cuadrada es una expresión compleja y por consiguiente no constante.

- **Independencia Técnica**. La relación de independencia de los factores se refleja en el parámetro b_6, donde:

  $b_6 > 0$: los factores son técnicamente complementarios.
  $b_6 = 0$: los factores son técnicamente independientes.
  $b_6 < 0$: los factores son técnicamente competitivos.

- **Líneas de Acotamiento**. La pendiente de la isocuanta determina la relación e independencia técnica de los factores de producción.

- **<u>Isocuantas</u>**. Las isocuantas tienen forma de elipse. Las características de las isocuantas son las siguientes:

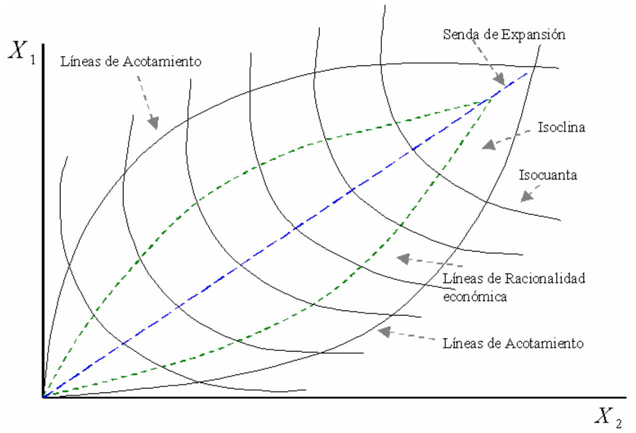
  a. *Pendiente*. Las isocuantas tienen puntos de pendiente positiva, negativa, cero e infinita.

  b. *Convexidad*. Las isocuantas son convexas respecto al origen.

  c. *Espaciamiento*. Con $a_i b_i > 0$ las isocuantas convergen y con $b_i < 0$ las isocuantas divergen, para i =1,2.

- **Etapas de Producción**. La función de producción de raíz cuadrada presenta las etapas II y III para cada factor individual y para la escala si la función es estrictamente cóncava. Llega a presentar la etapa I solamente, o las etapas II y III para cada factor individual y para la escala si la función es estrictamente cuasicóncava.

Figura No. 14. Líneas de acotamiento, líneas de racionalidad económica y senda de expansión.



Ejemplo 7.

Se tiene la siguiente función de producción que relaciona el uso de Nitrógeno (X1) y fósforo (X2) que intervienen en la producción de Maíz:

$$Y = a_0 + a_1\sqrt{X_1} + a_2\sqrt{X_2} + a_3X_1 + a_4X_2 + \varepsilon$$

Las expresiones matemáticas de óptimo físico, isocuantas, líneas de racionalidad técnica, líneas de racionalidad económica, senda de expansión y la tasa marginal de sustitución técnica se obtienen de la siguiente forma:

a. Optimo Físico.

Para nitrógeno: $PMg_{X_1} = \dfrac{a_1}{2\sqrt{X_1}} + a_3 = 0$, $X_1 = \left(-\dfrac{a_1}{2a_3}\right)^2$

Para fósforo: $PMg_{X_2} = \dfrac{a_2}{2\sqrt{X_2}} + a_4 = 0$, $X_2 = \left(-\dfrac{a_2}{2a_4}\right)^2$

b. Isocuantas.

Las isocuantas están representadas por la siguiente expresión:

$$X_2 = \left(\frac{a_2 \pm \sqrt{(a_2)^2 + 4a_4(Y - a_0 - a_1\sqrt{X_1} - a_3X_1)}}{-2a_4}\right)^2$$

c. Líneas de racionalidad técnica.

Línea de acotamiento para X_1: $PMg_{X_1} = \frac{a_1}{2\sqrt{X_1}} + a_3 = 0$, $X_1 = \left(-\frac{a_1}{2a_3}\right)^2$

Línea de acotamiento para X_2: $PMg_{X_2} = \frac{a_2}{2\sqrt{X_2}} + a_4 = 0$, $X_2 = \left(-\frac{a_2}{2a_4}\right)^2$

d. Líneas de racionalidad Económica

Sean P_Y, r_1 y r_2, el precio del maíz, del nitrógeno y del fósforo, respectivamente:

Líneas de racionalidad económica: $X_1 = \left(\frac{a_1 P_Y}{2(r_1 - a_3 P_Y)}\right)^2$ y $X_2 = \left(\frac{a_2 P_Y}{2(r_2 - a_4 P_Y)}\right)^2$

e. Senda de expansión

$$N = \left(\frac{r_2 a_1}{2(r_1 a_4 - r_2 a_3)} + \frac{r_2 a_1 \sqrt{P}}{r_1 a_2}\right)^2 \quad \text{o} \quad P = \left(\frac{2 r_1 a_2 \sqrt{N}}{2 r_2 a_1} + \frac{r_1 a_2}{2(r_2 a_3 - r_1 a_4)}\right)^2$$

f. Tasa marginal de sustitución:

$$TMS_{X_1,X_2} = \frac{PMg_{X_1}}{PMg_{X_2}} = \frac{\frac{a_1}{2\sqrt{X_1}} + a_3}{\frac{a_2}{2\sqrt{X_2}} + a_4} = \frac{\left(a_1\sqrt{X_2} + 2a_3\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}\right)}{\left(a_2\sqrt{X_1} + 2a_4\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}\right)}$$

5.2.2. Estimación Econométrica de la Función Raíz Cuadrada.

Los resultados de la estimación de una función de producción de raíz cuadrada a partir de la base de datos "Sinaloa.xls", cuya información aparece en el anexo 2, son los siguientes:

Tabla No. 2. Estimación de una función de producción raíz cuadrada[13].

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/09/04 Time: 23:55
Sample(adjusted): 1 101
Included observations: 101

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-21.89139	4.824573	-4.537477	0.0000
N	-0.844402	0.116239	-7.264381	0.0000
P	-0.444402	0.116239	-3.823187	0.0002
N^(0.5)	11.58739	1.468095	7.892811	0.0000
P^(0.5)	11.58739	1.468095	7.892811	0.0000
(N*P)^(0.5)	0.541487	0.102669	5.274092	0.0000

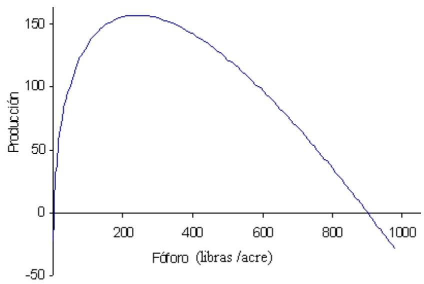
R-squared	0.957647	Mean dependent var	98.01980
Adjusted R-squared	0.955418	S.D. dependent var	26.09865
S.E. of regression	5.510604	Akaike info criterion	6.308794
Sum squared resid	2884.841	Schwarz criterion	6.464147
Log likelihood	-312.5941	F-statistic	429.6088
Durbin-Watson stat	0.750515	Prob(F-statistic)	0.000000

El modelo estimado corresponde a la siguiente expresión:

$$Y = -21{,}89139 + 11{,}58739\ N^{0,5} + 11{,}58739\ P^{0,5} - 0{,}844402\ N - 0{,}444402\ P + 0{,}541487\ (N * P)^{0,5}$$

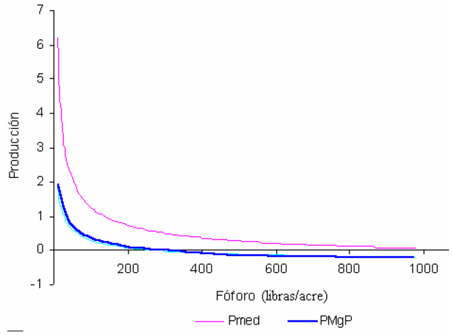
Esta función presenta las etapas II y III de producción debido a su estricta concavidad. A continuación se muestra la representación gráfica del producto total, el producto medio y marginal:

Figura No. 15. Producción de maíz. FPRC



13 En el modelo se observa relevancia estadística para todas las variables incluida la interacción. Hay dependencia estadística en el modelo, el R2 es alto (0,95) y los coeficientes presentaron los signos esperados.

Figura No. 16. Producto medio y producto marginal de maíz. FPRC



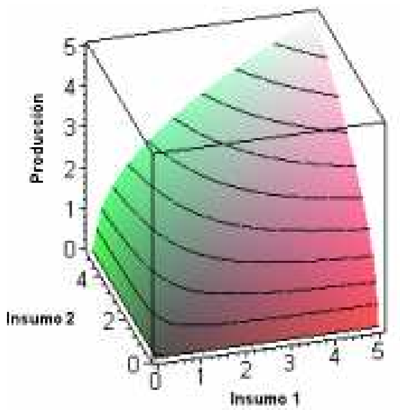
5.3. Función de Producción Cobb-Douglas.

La función de producción Cobb-Douglas tiene la siguiente forma:

$$Y = AX_1^{b_1} X_2^{b_2}$$

La gráfica en tres dimensiones de esta función de producción se presenta a continuación:

Figura No. 17. Función de producción Cobb-Douglas



5.3.1. Características Generales

La función de producción raíz cuadrada presenta las siguientes características:

- **Estricta Concavidad**. La existencia de un máximo global se garantiza con el cumplimiento de las siguientes restricciones en los parámetros de la función: $0 < b_1 < 1$; $0 < b_2 < 1$; $0 < (b_1 + b_2) < 1$; $A > 0$.

- **Estricta Cuasiconcavidad**. La función es cuasicóncava cuando $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ y $A > 0$.

- **Homogeneidad**. La función Cobb-Douglas es homogénea de grado $b_1 + b_2$.

- **Elasticidad de Producción**. Para este tipo de función la elasticidad de producción respecto a los insumos está representada por los parámetros estimados: $\varepsilon_1 = b_1$, $\varepsilon_2 = b_2$.

- **Elasticidad de Sustitución**. La función Cobb-Douglas presenta elasticidad de sustitución constante y puede obtenerse de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{\Delta\%\left(X_2 / X_1\right)}{\Delta\%(TMST)} = \frac{dLn\left(X_2 / X_1\right)}{dLn(TMST)} = 1$$

- **Independencia Técnica**. La función de producción Cobb-Douglas presenta factores técnicamente complementarios.

- **Líneas de Acotamiento**. Esta función no tiene líneas de acotamiento o de racionalidad técnica.

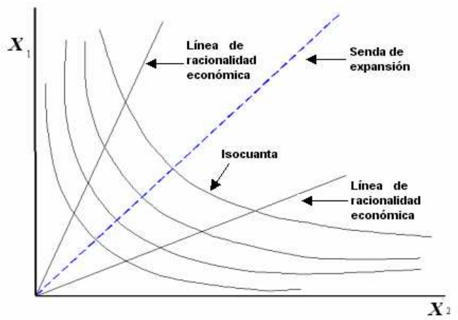
- **Isocuantas**. Las isocuantas presentan las siguientes características:
  a. *Pendiente*: las isocuantas tienen pendiente negativa.

  b. *Convexidad*: las isocuantas son convexas con respecto al origen.

  c. *Espaciamiento*: Si $(b_1 + b_2) > 1$, las isocuantas convergen, cuando $(b_1 + b_2) = 1$, las isocuantas están igualmente espaciadas y si $(b_1 + b_2) < 1$, las isocuantas divergen.

- **<u>Etapas de Producción</u>**. Esta función de producción presenta solamente la etapa II para cada factor individual y para la escala si existe estricta concavidad. Por otro lado, presenta la etapa I, o etapa II solamente para cada factor individual y para la escala si existe estricta cuasiconcavidad.

Figura No. 18. Función de Producción Cobb-Douglas



Ejemplo 8.

Se tiene la siguiente función de producción que relaciona el uso de Nitrógeno (X1) y fósforo (X2) que intervienen en la producción de Maíz:

$$Y = AX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$$

Halle las expresiones matemáticas de las isocuantas, las líneas de racionalidad económica, la senda de expansión, la tasa marginal de sustitución técnica y la elasticidad de sustitución.

a. Isocuantas: $X_2 = \left(\dfrac{Y}{AX_1^{\beta_1}} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$

b. Líneas de racionalidad Económica

   Sean P_Y, r_1 y r_2, el precio del maíz, del nitrógeno y el fósforo, respectivamente:

   Líneas de racionalidad económica: $X_2 = \left(\dfrac{r_1}{\beta_1 AP_Y X_1^{\beta_1 - 1}} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$ y $X_2 = \left(\dfrac{r_2}{\beta_2 AP_Y X_1^{\beta_1}} \right)^{\frac{1}{\beta_2 - 1}}$

c. Senda de expansión: $X_2 = \dfrac{r_1 \beta_2}{r_2 \beta_1} X_1$

d. Tasa marginal de sustitución: $TMST = \dfrac{\beta_1 X_2}{\beta_2 X_1}$

e. Elasticidad de sustitución: $\sigma = \dfrac{d \ln\left(\dfrac{X_2}{X_1} \right)}{d \ln\left(\dfrac{r_1}{r_2} \right)} = 1$

5.3.2. Estimación Econométrica de la Función Cobb - Douglas.

A continuación se presentan los resultados de la estimación de una función de producción tipo Cobb-Douglas (FPCD), a partir de la base de datos "Guadalajara.xls", cuya información aparece en el anexo 3:

Tabla No. 3. Estimación de una función de producción Cobb-Douglas[14]

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: 02/10/04 Time: 00:57
Sample: 1 100
Included observations: 100

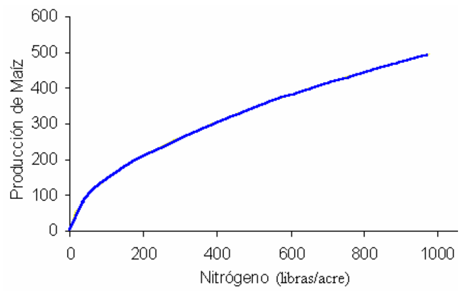
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.511588	0.061374	40.92242	0.0000
LOG(N)	0.175682	0.011288	15.56347	0.0000
LOG(P)	0.361037	0.011288	31.98384	0.0000

R-squared	0.928791	Mean dependent var	4.558110
Adjusted R-squared	0.927323	S.D. dependent var	0.291180
S.E. of regression	0.078498	Akaike info criterion	-2.221940
Sum squared resid	0.597712	Schwarz criterion	-2.143785
Log likelihood	114.0970	F-statistic	632.5939
Durbin-Watson stat	0.351338	Prob(F-statistic)	0.000000

La ecuación obtenida es la siguiente: $Y = e^{2,511588} N^{0,175682} P^{0,361037}$

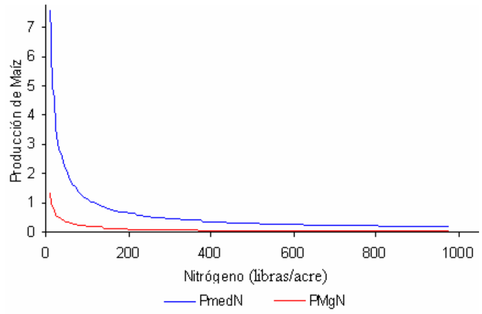
Esta función es estrictamente cóncava y cuenta con la etapa de producción II. A continuación se muestra la representación gráfica del producto total, el producto medio y marginal:

Figura No. 19. Producción de maíz. FPCD.



14 El modelo muestra un buen ajuste (R2= 0,93) y una alta relevancia y dependencia estadística. Adicionalmente, los coeficientes presentan los signos esperados. No obstante, los errores o perturbaciones no siguen una distribución normal.

Figura No. 20. Producto medio y producto marginal de maíz. FPCD.



5.4. Función de Producción de Elasticidad de Sustitución Constante (CES).

Esta función de producción como su nombre lo indica presenta elasticidad de sustitución constante. Funciones de producción como la Cobb-Douglas y la Leon Tieff son casos particulares de la función CES. La función de producción CES tiene la forma:

$$Y = A\left[b X_1^{-\rho} + (1-b) X_2^{-\rho}\right]^{-\frac{v}{\rho}}$$

5.4.1. Características Generales

La función de producción CES presenta las siguientes características:

- **Estricta Concavidad**. La función CES es estrictamente cóncava cuando $A > 0$; $0 < b < 1$; $0 < v \leq 1$ y $\rho > -1$.

- **Estricta Cuasiconcavidad**. Se presenta estricta cuasiconcavidad si $A > 0$; $0 < b < 1$; $v > 0$ y $\rho > -1$.

- **Homogeneidad**. La función CES es homogénea de grado v.

- **Elasticidad de Producción**. Se presenta elasticidad de producción variable:

$$\varepsilon_1 = vb\left[b X_1^{-\rho} + (1-b) X_2^{-\rho}\right]^{-1} X_1^{-\rho} \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = v(1-b)\left[b X_1^{-\rho} + (1-b) X_2^{-\rho}\right]^{-1} X_2^{-\rho}$$

- **Elasticidad Total**. Su elasticidad total es: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

- **Elasticidad de sustitución**. La elasticidad de sustitución tiene la forma.

$$\sigma = \frac{\Delta\%\left(X_2/X_1\right)}{\Delta\%(TMST)} = \frac{dLn\left(X_2/X_1\right)}{dLn(TMST)} = \frac{1}{1+\rho}$$

- **Independencia Técnica**. Cuando $(v+\rho) > 0$, los factores son técnicamente complementarios, si $(v+\rho) = 0$, los factores son técnicamente independientes y cuando $(v+\rho) < 0$, los factores son técnicamente competitivos.

- **Líneas de Acotamiento**. La función CES no tiene líneas de acotamiento o de racionalidad técnica.

- **Isocuantas**. Las isocuantas presentan las siguientes características:

  a. *Pendiente:* las isocuantas tiene pendiente negativa.

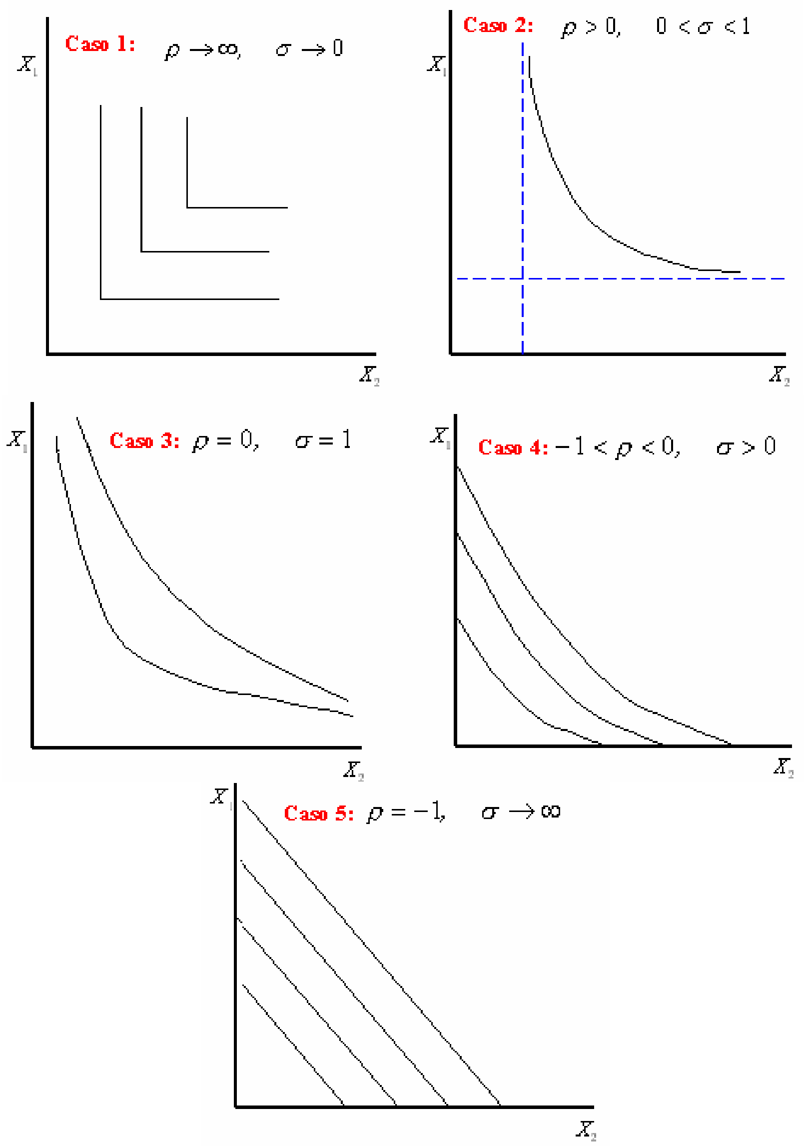
  b. *Convexidad:* las isocuantas son convexas respecto al origen.

  c. *Espaciamiento*: Cuando $v > 1$, las isocuantas convergen, si $v = 1$, las isocuantas están igualmente espaciadas y cuando $v < 1$, las isocuantas divergen.

- **Etapas de Producción**. La función CES presenta solamente la etapa II para cada factor individual y para la escala si existe estricta concavidad. La función llega a presentar la etapa I, o la etapa II solamente para la escala si hay estricta cuasiconcavidad.

A continuación se muestran las gráficas de las isocuantas de la función de producción CES de acuerdo con su elasticidad de sustitución:

Figura No. 21. Representación de las isocuantas según la elasticidad de sustitución de la función de producción CES.



Ejemplo 9.

Se tiene la siguiente función de producción que relaciona el uso de Nitrógeno (X1) y fósforo (X2) que intervienen en la producción de Maíz:

$$Y = A\left[\lambda X_1^{-\rho} + (1-\lambda) X_2^{-\rho}\right]^{-\frac{v}{\rho}}$$

Las expresiones matemáticas de las isocuantas, las líneas de racionalidad económica, la senda de expansión, la tasa marginal de sustitución técnica y la elasticidad de sustitución, se obtienen de la manera siguiente:

a. Isocuantas: $$X_2 = \left[\frac{1}{(1-\lambda)} \left(\frac{Y}{A} \right)^{-\frac{\rho}{v}} - \frac{\lambda X_1^{-\rho}}{(1-\lambda)} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

b. Líneas de racionalidad Económica

Sean P_Y, r_1 y r_2, el precio del maíz, del nitrógeno y el fósforo, respectivamente:

Líneas de racionalidad económica:

$$X_1 = \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{r_2}{P_Y A v (1-\lambda) X_2^{-\rho-1}} \right)^{\frac{\rho}{-v-\rho}} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda} X_2^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \text{ y } X_2 = \left[\frac{1}{(1-\lambda)} \left(\frac{r_1}{P_Y A v \lambda X_1^{-\rho-1}} \right)^{\frac{\rho}{-v-\rho}} - \frac{\lambda X_1^{-\rho}}{(1-\lambda)} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

c. Senda de expansión: $$X_2 = X_1 \left[\frac{(1-\lambda) r_1}{\lambda r_2} \right]^{\frac{1}{\rho+1}}$$

d. Tasa marginal de sustitución: $$TMST = \frac{\lambda}{(1-\lambda)} \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{\rho+1}$$

e. Elasticidad de sustitución: $$\sigma = \frac{dLn\left(\frac{X_2}{X_1} \right)}{dLn\left(\frac{r_1}{r_2} \right)} = \frac{1}{\rho+1}$$

5.4.2. Estimación Econométrica de la Función CES.

Teniendo en cuenta que la función CES es no lineal se recomienda inicialmente desarrollar una transformación logarítmica y luego una aproximación en serie de Taylor para su estimación econométrica.

La función de producción CES presentada como $Y = A\left[\delta N^{-\rho} + (1-\delta) P^{-\rho}\right]^{-\frac{v}{\rho}}$ puede transformarse de la siguiente manera agregando un término de perturbación ε:

$$LnY = LnA - \frac{v}{\rho} Ln \left[\delta N^{-\rho} + (1-\delta) P^{-\rho}\right] + \varepsilon$$

Una aproximación en serie de Taylor a esta función alrededor del punto $\rho = 0$ es la siguiente:

$$LnY = LnA + v\delta\, LnN + v(1-\delta) LnP + \rho v \delta\, (1-\delta) \left\{ -\frac{1}{2} \left[LnN - LnP \right]^2 \right\} + \varepsilon$$

El modelo planteado para la estimación se presenta a continuación :

$$LnY = \beta_1 + \beta_2 \, LnN + \beta_3 \, LnP + \beta_4 \left\{ -\frac{1}{2} \left[Ln(N/P) \right]^2 \right\} + \varepsilon$$

Donde: $\beta_1 = LnA$, $\beta_2 = \nu\delta$, $\beta_3 = \nu(1-\delta)$ y $\beta_4 = \rho\nu\delta(1-\delta)$. De estas expresiones pueden obtenerse las siguientes ecuaciones:

$$\gamma = e^{\beta_1} \ , \ \delta = \beta_2 / (\beta_2 + \beta_3) \ , \ \nu = \beta_2 + \beta_3 \ \text{y} \ \ \rho = \beta_4 (\beta_2 + \beta_3) / \beta_2 \beta_3$$

De acuerdo con el modelo anterior, a partir de la base de datos "Guadalajara.xls", se estimó una función de producción CES (FPCES), cuyos resultados son los siguientes:

Tabla No. 4. Estimación de una función de producción CES[15].

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: 02/11/04 Time: 18:18
Sample: 1 100
Included observations: 100

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.488085	0.072078	34.51929	0.0000
LOG(N)	0.178234	0.012033	14.81259	0.0000
LOG(P)	0.363588	0.012033	30.21698	0.0000
-0.5*(LOG(N/P))^2	-0.008359	0.013330	-0.627076	0.5321

R-squared	0.929082	Mean dependent var	4.558110
Adjusted R-squared	0.926865	S.D. dependent var	0.291180
S.E. of regression	0.078745	Akaike info criterion	-2.206028
Sum squared resid	0.595273	Schwarz criterion	-2.101821
Log likelihood	114.3014	F-statistic	419.2223
Durbin-Watson stat	0.322869	Prob(F-statistic)	0.000000

La ecuación estimada es la siguiente:

$$\hat{Y} = 12.038 \left[0.329 \, N^{0.0699} + 0.671 \, P^{0.0699} \right]^{7.754}$$

Esta función es estrictamente cóncava y cuenta con la etapa de producción II. Los parámetros estimados permiten indicar rendimientos decrecientes a escala e isocuantas divergentes. A continuación se presenta la gráfica del producto total, el producto medio y el marginal:

[15] Los resultados del modelo muestran que todas las variables explicativas son significativas al 1%, excepto el término que corresponde a la variable construida para la estimación (-0.5*(LOG(N/P))^2). Puede observarse que existe una alta dependencia estadística, un buen ajuste (R2=0.93) y adicionalmente, cada una de las variables cuenta con los signos esperados.

Figura No. 22. Producción de maíz. FPCES.

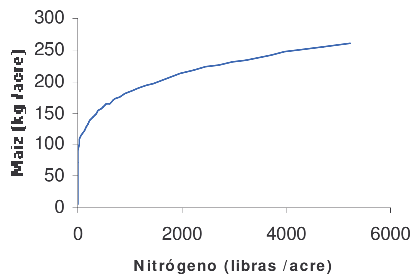
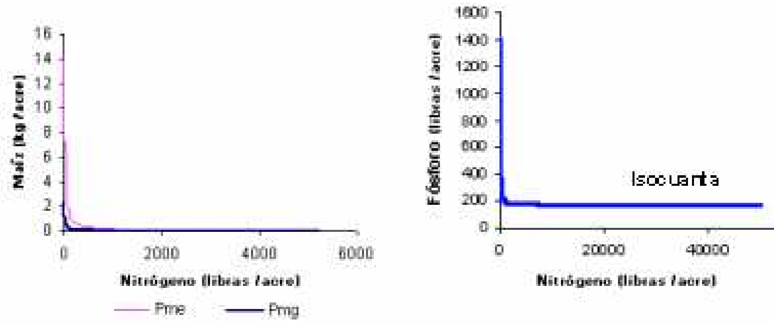


Figura No. 23. Producto medio y producto marginal de maíz. FPCES.



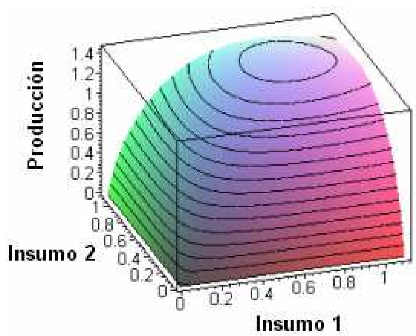
5.5. Función de Producción Trascendental.

La función de producción trascendental tiene la siguiente forma:

$$y = Ax_1^{a1}\exp(b_1x_1)x_2^{a2}\exp(b_2x_2)$$

La gráfica en tres dimensiones de esta función de producción se presenta a continuación:

Figura No. 24. Función de producción Trascendental



5.5.1. Características Generales

La función de producción trascendental presenta las siguientes características:

- **Estricta Concavidad**. Existe estricta concavidad globalmente si $b_i < 0$, $A > 0$ y $0 < a_i \leq 1$. Por otro lado, se puede satisfacer estricta concavidad localmente para otros valores de los parámetros.

- **Estricta Cuasiconcavidad**. Se presenta estricta cuasiconcavidad globalmente si $A > 0$ y $a_i > 0$. Existe estricta cuasiconcavidad localmente para otros valores de los parámetros.

- **Homogeneidad**. Esta función no es homogénea, a menos que $b_1 = b_2 = 0$, en cuyo caso se reduce a la función de producción Cobb-Douglas generalizada.

- **Elasticidad de Producción**. La elasticidad de producción de la función CES es variable: $\varepsilon_1 = b_1 X_1 + a_1$ y $\varepsilon_2 = b_2 X_2 + a_2$

- **Elasticidad de Sustitución**. La elasticidad de sustitución es una ecuación compleja, en este sentido, σ no es constante, a excepción del caso $b_1 = b_2 = 0$.

- **Independencia Técnica**. Se presentan factores técnicamente complementarios en las regiones donde las isocuantas tienen pendiente negativa, factores técnicamente independientes sobre las líneas de acotamiento y factores técnicamente competitivos en las regiones donde las isocuantas poseen pendiente positiva.

- **Líneas de Acotamiento**. La función trascendental cuenta con líneas de acotamiento rectangulares.

- **Isocuantas**: Las isocuantas presentan las siguientes características:

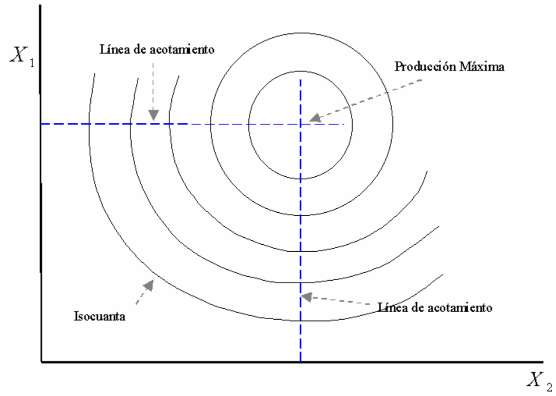
  a. *Pendiente*: las isocuantas tienen regiones de pendiente positiva y negativa.

  b. *Convexidad*: las isocuantas son convexas con respecto al origen.

  c. *Espaciamiento*: las isocuantas convergen para estricta concavidad. Divergen cuando existe estricta cuasiconcavidad.

- **Etapas de Producción**. La función trascendental presenta las etapas I, II y III para cada factor individual y para la escala cuando existe estricta cuasiconcavidad. La función llega a presentar las etapas II y III para cada factor individual y para la escala si existe estricta concavidad.

Figura No. 25. Isoclinas para la Función de producción Trascendental sin término de interacción.



<u>Ejemplo 10</u>.

Se tiene la siguiente función de producción que relaciona el uso de Nitrógeno (X1) y fósforo (X2) que intervienen en la producción de Maíz:

$$Y = AX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} e^{\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2}$$

Las expresiones matemáticas de las líneas de racionalidad técnica y económica, la senda de expansión, la tasa marginal de sustitución técnica y la elasticidad de sustitución, se obtienen de la forma siguiente:

a. Líneas de racionalidad técnica: $X_1 = -\frac{\beta_1}{\gamma_1}$ y $X_2 = -\frac{\beta_2}{\gamma_2}$

b. Líneas de racionalidad Económica:

   Sean P_Y, r_1 y r_2, el precio del maíz, del nitrógeno y el fósforo, respectivamente:

   Líneas de racionalidad económica: $X_1 = \frac{\beta_1 P_Y}{r_1 - \gamma_1 P_Y}$ y $X_2 = \frac{\beta_2 P_Y}{r_2 - \gamma_2 P_Y}$

c. Senda de expansión: $X_2 = \frac{\beta_2 r_1 X_1}{r_2 \beta_1 + (r_2 \gamma_1 - \gamma_2 r_1) X_1}$

d. Tasa marginal de sustitución: $TMST_{X_1, X_2} = \frac{X_2(\beta_1 + \gamma_1 X_1)}{X_1(\beta_2 + \gamma_2 X_2)}$

e. Elasticidad de sustitución:

$$\sigma = \frac{\left(\beta_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 X_2 + \gamma_1\beta_2 X_1 + \gamma_1\gamma_2 X_1 X_2\right)\left[\beta_2 + \gamma_2 X_2 + \beta_1 + \gamma_1 X_1\right]}{\beta_2^2\beta_1 + \beta_1^2\beta_2 + 2\beta_1\beta_2\gamma_2 X_2 + \gamma_2^2\beta_1 X_2^2 + 2\beta_1\gamma_1\beta_2 X_1 + \gamma_1^2\beta_2 X_1^2}$$

5.5.2. Estimación Econométrica de la Función Trascendental.

A continuación se presentan los resultados de la estimación de una función de producción trascendental (FPT), a partir de la base de datos “Guadalajara.xls”:

Tabla No. 5. Estimación de una función de producción trascendental[16]

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: 02/11/04 Time: 23:42
Sample: 1 100
Included observations: 100

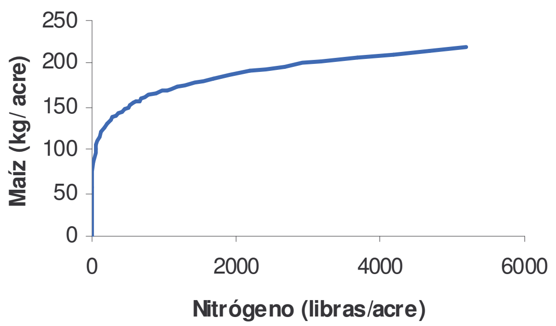
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.698075	0.094766	17.91859	0.0000
LOG(N)	0.388638	0.025944	14.97984	0.0000
LOG(P)	0.485108	0.025944	18.69820	0.0000
N	-0.005418	0.000628	-8.625201	0.0000
P	-0.003156	0.000628	-5.025159	0.0000

R-squared	0.965245	Mean dependent var	4.558110
Adjusted R-squared	0.963782	S.D. dependent var	0.291180
S.E. of regression	0.055414	Akaike info criterion	-2.899247
Sum squared resid	0.291722	Schwarz criterion	-2.768989
Log likelihood	149.9624	F-statistic	659.6130
Durbin-Watson stat	0.902085	Prob(F-statistic)	0.000000

El modelo estimado es el siguiente: $Y = 5.46N^{0.389}P^{0.485}e^{-0.0054N-0.032P}$

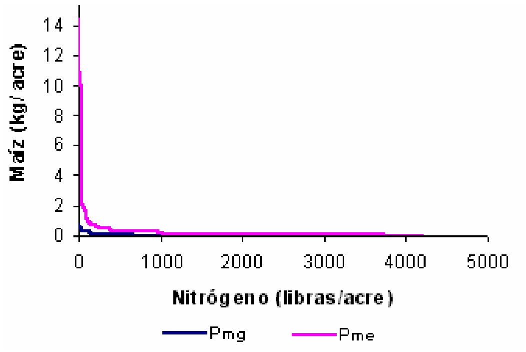
Esta función presenta las etapas II y III de producción, debido su estricta concavidad. A continuación se presenta la gráfica del producto total, el producto medio y el marginal:

Figura No. 26. Producción de maíz. FPT.



16 En el modelo se observa que todas las variables exógenas son significativas al 1%. Las variables explicativas presentan los signos esperados y existe un buen ajuste (R2=0.96) y alta dependencia estadística.

Figura No. 27. Producto medio y producto marginal de maíz. FPT.



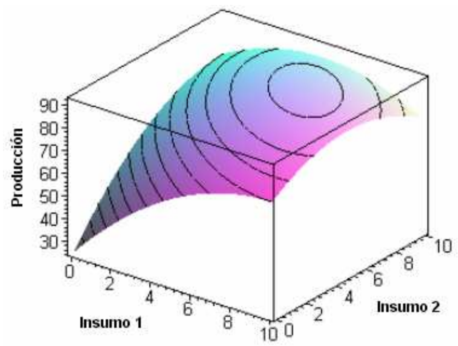
5.6. Función de Producción Translogaritmica.

La función de producción translogaritmica tiene la siguiente forma:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \ln X_1 + \alpha_2 \ln X_2 + 0.5\beta_1 \ln X_1 \ln X_1 + 0.5\beta_2 \ln X_2 \ln X_2 + \beta_3 \ln X_1 \ln X_2$$

La gráfica en tres dimensiones de esta función de producción se presenta a continuación:

Figura No. 28. Función de producción Translogaritmica



5.6.1. Características Generales

La función de producción translogaritmica presenta las siguientes características:

- **Estricta Concavidad**. Para esta función no puede asegurarse estricta concavidad globalmente.

- **Estricta Cuasiconcavidad.** Se presenta estricta cuasiconcavidad cuando se cumple que: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$ *y* $\beta_i > 0$.

- **Homogeneidad**. La función translogaritmica es homogénea de grado $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ si $\Sigma_i \beta_i = 0$.

- **Elasticidad de Producción**. La elasticidad de producción de esta función es variable:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 + b_1 ln(X_1) + b_3 ln(X_2)}{y}$$

- **Elasticidad de Sustitución**. La elasticidad de sustitución de la función translogaritmica es una expresión compleja, por lo tanto su valor no es constante.

- **Independencia Técnica**. La relación de independencia de los factores se refleja en el parámetro β_3, donde:

  $\beta_3 > 0$: los factores son técnicamente complementarios.
  $\beta_3 = 0$: los factores son técnicamente independientes.
  $\beta_3 < 0$: los factores son técnicamente competitivos.

Ejemplo 11.

Se tiene la siguiente función de producción que relaciona el uso de Nitrógeno (X1) y fósforo (X2) que intervienen en la producción de Maíz:

$$Y = AX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} e^{0.5\gamma\, Ln(X_1) Ln(X_2)}$$

Halle las expresiones matemáticas de las líneas de racionalidad técnica y económica y la tasa marginal de sustitución técnica.

a. Líneas de racionalidad técnica: $X_2 = e^{-\frac{\beta_1}{0.5\gamma}}$ y $X_1 = e^{-\frac{\beta_2}{0.5\gamma}}$.

b. Líneas de racionalidad Económica

   Sean P_Y, r_1 y r_2, el precio del maíz, del nitrógeno y el fósforo, respectivamente:

   Líneas de racionalidad económica: $X_2 = e^{\left(\frac{r_1 X_1}{P_Y} - \beta_1\right)\frac{1}{0.5\gamma}}$ y $X_1 = e^{\frac{r_2 X_2}{0.5\gamma\, P_Y} - \frac{\beta_2}{0.5\gamma}}$

c. Tasa marginal de sustitución: $TMST = \dfrac{X_2(\beta_1 + 0.5\gamma\, Ln(X_2))}{X_1(\beta_2 + 0.5\gamma\, Ln(X_1))}$

5.6.2. Estimación Econométrica de la Función Translogaritmica.

A continuación se presentan los resultados de la estimación de una función de producción translogaritmica (FPTL), a partir de la base de datos "Guadalajara.xls":

Tabla No. 6. Estimación de una función de producción translogaritmica [17]

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: 02/12/04 Time: 01:28
Sample: 1 100
Included observations: 100

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.345555	0.212047	6.345556	0.0000
LOG(N)	0.481484	0.054709	8.800864	0.0000
LOG(P)	0.666839	0.054709	12.18889	0.0000
0.5*LOG(N)*LOG(P)	-0.160399	0.028230	-5.681842	0.0000

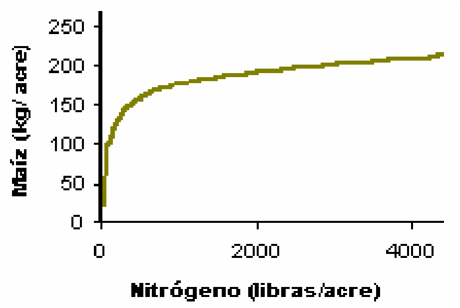
R-squared	0.946711	Mean dependent var	4.558110
Adjusted R-squared	0.945046	S.D. dependent var	0.291180
S.E. of regression	0.068259	Akaike info criterion	-2.491833
Sum squared resid	0.447294	Schwarz criterion	-2.387626
Log likelihood	128.5917	F-statistic	568.5017
Durbin-Watson stat	0.349490	Prob(F-statistic)	0.000000

El modelo estimado tiene la siguiente expresión:

$$Y = 3.8403 N^{0.481} P^{0.667} e^{-0.082 \; Ln(N) Ln(P)}$$

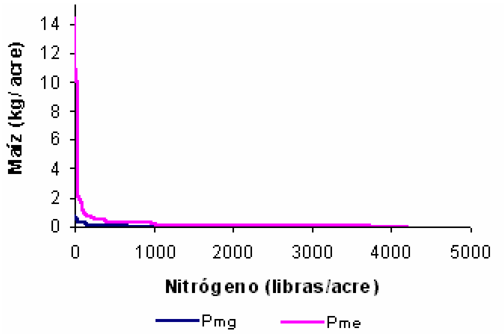
La función translogaritmica obtenida presenta las etapas II y III de producción debido a su estricta concavidad. A continuación se presenta la gráfica del producto total, el producto medio y marginal:

Figura No. 29. Producción de maíz. FPTL.



[17] En el modelo se observa que todas las variables exógenas son significativas al 1%. Las variables explicativas presentan los signos esperados y existe un buen ajuste (R2=0.95) y alta dependencia estadística.

Figura No. 30. Producto medio y producto marginal de maíz. FPTL.



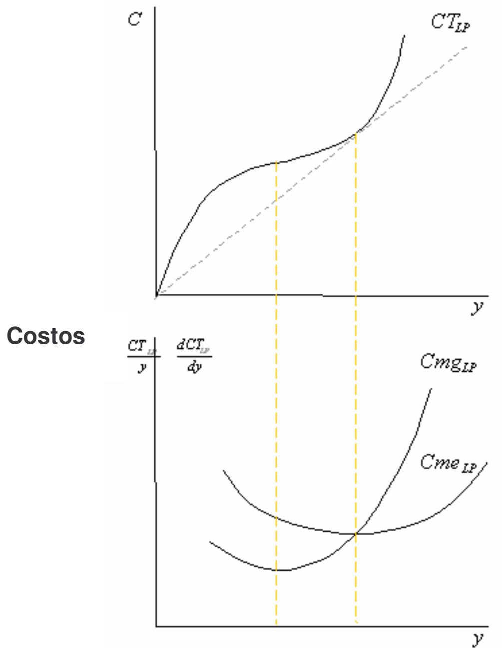
6. TEORIA DE LA FUNCION DE COSTOS.

La función de costos es una herramienta útil para describir las posibilidades económicas de la firma. A continuación se definen algunos conceptos relacionados con la función de costos:

- **Costo Total de Corto Plazo**. El costo total de corto plazo es la suma de los costos fijos y costos variables.
- **Costo Medio de Corto Plazo**. Es el costo total de corto plazo por unidad de producción.
- **Costo Variable Medio de Corto Plazo**. Representa el costo en que se incurre por unidad de producto al usar factores variables en el corto plazo.
- **Costo Fijo Medio de Corto Plazo.** Es el costo en que se incurre por unidad de producto al usar factores fijos en el corto plazo.
- **Costo Marginal de Corto Plazo**. Expresa el costo adicional en el corto plazo derivado de incrementar la producción en una unidad más de producto.
- **Costo Total de Largo Plazo**. Debido a que en el largo plazo todos los factores se consideran variables, el costo total de largo plazo es igual al costo variable.
- **Costo Medio de Largo Plazo**. Representa el costo variable por unidad de producto al usar factores variables en el largo plazo.
- **Costo Marginal de Largo Plazo**. Es el costo adicional en el largo plazo derivado de incrementar la producción en una unidad más de producto.

La siguiente figura muestra la estrecha relación entre la función de costos totales de largo plazo y la función de costo marginal y costo medio de largo plazo:

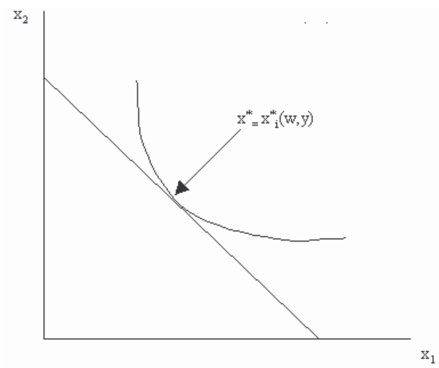
Figura No. 31. Función de costos de largo plazo



6.1. Objetivo de la Función de Costos.

La función de costos es la solución al problema de minimización de costos sujeto a una restricción tecnológica. La utilización de insumos no solo esta determinada por el tipo de tecnología, sino también por la cantidad de recursos disponibles. La firma busca alcanzar un óptimo económico, aquel que le garantiza producir con su tecnología a un mínimo costo.

Figura No. 32. Optimo económico



El problema puede plantearse de la siguiente manera:

$$c(\mathbf{w}, y) = \underset{x}{Min}\ \mathbf{w}.\mathbf{x} \text{ sujeto a } f(\mathbf{x}) = y .$$

Donde y representa el nivel de producción y $f\ (\mathbf{x})$ la función de producción. El Lagrangiano toma la forma:

$$L = \mathbf{w}.\mathbf{x} + \lambda[y - f(\mathbf{x})]$$

CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$$

$$TMSE_{x_i, x_j} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = TMST_{x_i, x_j} \text{ , para todo } i \neq j,\ i, j = 1,2,\ldots,n$$

De la solución al sistema de ecuaciones, se obtienen las demandas condicionadas de factores: $x^*_i = x^*_i(\mathbf{w}, y)$, para todo i =1,2,…,n. La función de costos se obtiene finalmente reemplazando estas demandas en la función objetivo: $c(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}\ .\mathbf{x}^*\ (\mathbf{w}, y)$.

6.2. Propiedades y Características de la Función de Costos.

La función de costos presenta las siguientes propiedades:

1. $c(\mathbf{w},y)$ es no decreciente en $\mathbf{w}$: si $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w}$, entonces $c(\mathbf{w}', y) \geq c(\mathbf{w}, y)$.
2. $c(\mathbf{w},y)$ es homogénea de grado uno en $\mathbf{w}$: $c(t\mathbf{w}, y) = tc(\mathbf{w}, y)$ si $t > 0$.
3. $c(\mathbf{w},y)$ es cóncava en $\mathbf{w}$: $c(t\mathbf{w} + (1-t)\mathbf{w}', y) \geq tc(\mathbf{w}, y) + (1-t)c(\mathbf{w}', y)$ si $0 \leq t \leq 1$.
4. $c(\mathbf{w},y)$ es continua en $\mathbf{w}$, cuando $\mathrm{w} \geq 0$.

Otra propiedad conocida de la función de costos es la propiedad de la derivada o Lema de Shephard. A través de dicha propiedad se puede obtener la función de demanda condicionada de factores:

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} = x_i(\mathbf{w}, y)$$

Además, por la condición de maximización de beneficios en competencia perfecta:

$$p = \frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y}$$

Despejando y se obtiene la función de oferta: $y = y(p, \mathbf{w})$.

6.3. Algunas Especificaciones de La Función de Costos.

La función de costos puede tener variadas especificaciones. Siendo r_1 y r_2 los precios de los insumos X_1 y X_2, y el producto, a, b, y k(a) parámetros de la función de producción, se presentan a continuación algunas especificaciones:

- Función de costos de una función de producción lineal:

$$c(r_1, r_2, y) = Min\left\{\frac{X_1}{a}, \frac{X_2}{b}\right\} y$$

- Función de costos de una función de producción Leontief:

$$c(r_1, r_2, y) = \left(\frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b}\right) y$$

- Función de costos de una función de producción Cobb-Douglas:

$$c(r_1, r_2, y) = k(a) r_1^a r_2^{1-a} y$$

- Función de costos de una función de producción CES:

$$c(r_1, r_2, y) = \left(r_1^r + r_2^r\right)^{1/r}$$

<u>Ejemplo 12.</u>

Sea la siguiente función de costos[18]: $C = r_1 X_1 + r_2 X_2$

Se desea minimizar el costo sujeto a una función de producción tipo Cobb-Douglas:

$$y = X_1^a X_2^{1-a}$$

[18] Tomado de H. Varian (1992), Cap. 5. La Función de Costes.

Asumiendo que x_2 es un factor constante, y despejando en la restricción, x_1 en función de y y x_2, se tiene: $X_1 = \left(yX_2^{a-1}\right)^{\frac{1}{a}}$

a) Costo total: $C = r_1\left(yX_2^{a-1}\right)^{\frac{1}{a}} + r_2X_2$

b) Costo medio de corto plazo: $Cme_{CP} = r_1\left(\frac{y}{X_2}\right)^{\frac{1-a}{a}} + r_2\frac{X_2}{y}$

c) Costo variable medio de corto plazo: $CVme_{CP} = r_1\left(\frac{y}{X_2}\right)^{\frac{1-a}{a}}$

d) Costo fijo medio de corto plazo: $CFme_{CP} = r_2\frac{X_2}{y}$

e) Costo marginal de corto plazo: $CVme_{CP} = \frac{r_1}{a}\left(\frac{y}{X_2}\right)^{\frac{1-a}{a}}$

7. TEORIA DE LA DUALIDAD.

7.1. La Dualidad de Funciones

La existencia de una relación dual entre la tecnología y su función de costos tiene implicaciones importantes para el análisis económico de la producción:

a) Primero, resulta útil desde el punto de vista teórico poder describir las propiedades tecnológicas de dos maneras distintas, ya que algunos argumentos son más fáciles de demostrar utilizando una función de costos o de beneficios que utilizando una representación directa de la tecnología.

b) Segundo, las representaciones duales de la conducta de la firma, como la función de costos y la función de beneficios, resultan muy útiles en el análisis de equilibrio.

c) Tercero, las representaciones duales facilitan la aplicación de estudios econométricos, debido a que las variables que entran en la especificación dual, como los precios, son variables exógenas. Si los mercados de factores son competitivos, la empresa considera dados los precios y elige las cantidades, por lo que los precios pueden no estar correlacionados estadísticamente con el término de error en relación al producto.

La función de costos resume todos los aspectos económicamente relevantes de la tecnología. La representación de las funciones duales, indica que tanto por el lado de los beneficios, como por el lado de los costos, se puede llegar al mismo nivel de producción y demanda de factores, que maximiza los beneficios de la empresa.

7.2. Función Dual de Beneficios

La función objetivo del problema de maximización de beneficios del productor sujeto a una restricción tecnológica se conoce como la función primal de beneficios. La solución a este problema recibe el nombre de función dual de beneficios:

Sea $\Pi = pY - C$, donde *p* representa el nivel de precios del producto, $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, la función de producción a partir de los factores X_1, X_2, …, X_n y $C = r_1X_1 + r_2X_2 + \cdots + r_nX_n$, la función de costos de esta tecnología, con r_1, r_2, …, r_n como precios de los factores X_1, X_2, …, X_n, respectivamente.

El PMB se representa de la forma:

$$Max_{X_i's} \quad \Pi = p\, f(X_1, X_2, \ldots, X_n) - r_1X_1 + r_2X_2 + \cdots + r_nX_n \quad , \; i = 1,2,\ldots,n$$

La solución de las *n* ecuaciones de primer orden dan origen a las *n* funciones de demanda ordinarias de factores: $X_i^* = X_i^*(p, r_1, r_2, \ldots, r_n)$, para todo i = 1,2,..., n. Luego sustituyendo el conjunto de ecuaciones X_i^* en Y y Π se obtiene la función de oferta $Y^* = Y^*(p, r_1, r_2, \ldots, r_n)$ y la función dual de beneficios $\Pi^* = \Pi^*(p, r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Ejemplo 13.

Se quiere encontrar la función dual de beneficios para una función de producción Cobb-Douglas a partir de información que aparece en la siguiente salida econométrica:

Tabla No. 7. Estimación de una función de producción Cobb-Douglas.

Dependent Variable: LOG(Y)
Sample: 1 100
Included observations: 100

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.511588	0.061374	40.92242	0.0000
LOG(N)	0.175682	0.011288	15.56347	0.0000
LOG(P)	0.361037	0.011288	31.98384	0.0000

R-squared	0.928791	Mean dependent var	4.558110
Adjusted R-squared	0.927323	S.D. dependent var	0.291180
S.E. of regression	0.078498	Akaike info criterion	-2.221940
Sum squared resid	0.597712	Schwarz criterion	-2.143785
Log likelihood	114.0970	F-statistic	632.5939
Durbin-Watson stat	1.604714	Prob(F-statistic)	0.000000

La ecuación de la función de producción estimada es la siguiente:

$$Y = e^{2,511588} N^{0,175682} P^{0,361037}$$

A partir de esta función se hallan las expresiones de las funciones de oferta, de demanda de factores, y función dual de beneficios:

Función de oferta: $Y^* = 0.2233 e^{5.4252} \left(\frac{p}{r_1} \right)^{0.38} \left(\frac{p}{r_2} \right)^{0.78}$

Funciones de demanda de factores:

$$X_1^* = 0.041 e^{5.4252} \frac{p^{2.16}}{r_1^{1.38} r_2^{0.78}} \quad \text{y} \quad X_2^* = 0.084 e^{5.4252} \frac{p^{2.16}}{r_1^{0.38} r_2^{1.78}}$$

Función dual de beneficios: $\Pi^* = 0.11 e^{5.4252} \frac{p^{2.16}}{r_1^{0.38} r_2^{0.78}}$

7.3. Función Dual de Producción

Esta función se obtiene de la solución del problema de maximización de la producción dado un nivel de costo (PMP). Forman parte también de la solución las demandas de factores costo constante.

El PMP se representa de la forma:

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) + \lambda(C - r_1 X_1 - r_2 X_2 - \cdots - r_n X_n)$$

A partir de la solución de las n+1 ecuaciones de primer orden se obtienen las funciones de demanda de factores costo constante: $X_i^* = X_i^*(C, r_1, r_2, \ldots, r_n)$, para todo i = 1,2,..., n. Luego la función dual de producción se halla sustituyendo el conjunto de ecuaciones X_i^* en $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $Y^* = Y^*(C, r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Así como en el enfoque de maximización de beneficios comúnmente se utiliza el Lema de Hotelling para encontrar las demandas de factores y la función de oferta, en el esquema dual de producción se usa la expresión conocida con el nombre de Identidad de Roy. Esta Identidad permite encontrar las demandas costo constante de factores:

$$X_1^* = -\frac{\frac{\partial Y^*}{\partial r_1}}{\frac{\partial Y^*}{\partial c}}$$, para todo i = 1,2,..., n.

Ejemplo 14.

Encontrar las funciones de demanda condicionadas al costo y su respectiva función dual de producción, a partir de los resultados de la salida econométrica presentada en el ejemplo anterior, la cual corresponde a una función de producción Cobb-Douglas:

Funciones de demanda costo constantes: $X_1^* = 0.3273\frac{c}{r_1}$ y $X_2^* = 0.6727\frac{c}{r_2}$

Función dual de producción: $Y^* = 0.7122327e^{2.511588}\frac{C^{0.536719}}{r_1^{0.176}r_2^{0.361}}$

7.4. Función Dual de Costos

La función objetivo del problema de minimización de costos del productor sujeto a una restricción tecnológica (PMC) se conoce como la función primal de costos. La solución a este problema recibe el nombre de función dual de costos.

El Lagrangiano en este caso es el siguiente:

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda) = r_1X_1 + r_2X_2 + \cdots + r_nX_n + \lambda(Y - f(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \quad (1)$$

A partir de la solución de las n+1 ecuaciones de primer orden se obtienen las funciones de demanda condicionadas de factores: $X_i^* = X_i^*(r_1, r_2, \ldots, r_n, y)$, para todo i = 1,2,..., n. Luego la función dual de costos se halla sustituyendo el conjunto de ecuaciones X_i^* en $C = r_1X_1 + r_2X_2 + \cdots + r_nX_n$: $C = C(r_1, r_2, \ldots, r_n, y)$.

Ejemplo 15.

Encontrar las funciones de demanda condicionadas y la función dual de costos, a partir de la información de la función de producción Cobb-Douglas de los ejemplos anteriores:

Funciones de demanda condicionadas:

$$X_1^* = 0{,}62e^{4{,}67}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0{,}67} Y^{1{,}86} \quad \text{y} \quad X_2^* = 1{,}27e^{4{,}67}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{0{,}33} Y^{1{,}86}$$

Función dual de costo: $C = 1.89e^{4.67}r_1^{0.33}r_2^{0.67}Y^{1.86}$

7.5. Relaciones entre la Función de Producción y la Función de Costos.

La función de producción tiene una estrecha relación con la especificación de la función de costos. Esta relación obedece a que los procesos de optimización tratan de conservar las características analíticas de la función originaria de producción.

Por otro lado, se han encontrado ventajas a la utilización de la función de costos en lugar de la función de producción para estimar los parámetros de producción. Por ejemplo, una de las más comunes se refiere a que la estimación de la función de costos no requiere imponer restricciones de homogeneidad sobre el proceso de producción, pues las funciones de costos son homogéneas en los precios sin que interese la homogeneidad de la función de producción.

A continuación se presentan algunas funciones de producción y su correspondiente función de costos:

Tabla No. 8. Dualidad entre la función de producción y la función de costos.

Tipo de función	Función de producción	Función de costos
Lineal	$y = aX_1 + bX_2$	$c(r_1, r_2, y) = Min\left\{\frac{X_1}{a}, \frac{X_2}{b}\right\}y$
Leontief	$y = Min\{aX_1, bX_2\}$	$c(r_1, r_2, y) = \left(\frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b}\right)y$
Cobb-Douglas	$y = x_1^a x_2^{1-a}$	$c(r_1, r_2, y) = k(a) r_1^a r_2^{1-a} y$
C.E.S.	$y = \left(X_1^\rho + X_2^\rho\right)^{1/\rho}$	$c(r_1, r_2, y) = \left(r_1^r + r_2^r\right)^{1/r}; r = \rho/(\rho - 1)$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Beatie Bruce and C. Robert Taylor (1986). *"The Economics of Production"* Montana State University. USA.

Binger Brian R., Hoffman Elizabeth (1988). *"Microeconomics with calculus"*, 2nd. Ed. Addison – Wesley Educational Publishers Inc.

Chambers, Robert (1993). *"Production Economics"*, Ed. John Wiley. USA

Debertin, David (1986). *"Agricultural production economics"*, Macmillan Publishing Company, New York.

Greene, William H. (2000). *"Econometrics Analysis"*, Fourth Edition. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

Holland, T. (1985). *"Duality Theory and Applied Production Economics Research: A Pedagogical Treatise"*, Agricultural Research Center. College of Agriculture and Home Economics. Washington State University.

Mas-Collel, A., Michael, D.W. and Jerry, R.G (1985). *"Microeconomic Theory"*, Oxford University Press, New York.

Rosales, Ramón (1986). *"Respuesta de la Caña al Nitrógeno, Fósforo y Potasio en el Distrito de Barbosa, Santander"*, Arreglo Caña Intercalada, Maíz-Caña-Fríjol. Revista ICA.

Varian, Hal R (1992). *"Microeconomic Analysis"*, 3rd. edition, Antoni Bosch, editor, S.A.

ANEXO 1. BASE DE DATOS "Agrícola.xls".

No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P
1	0	0	0	31	104	20	80	61	110	50	50	91	80	80	20
2	17	0	10	32	105	20	90	62	117	50	60	92	93	80	30
3	32	0	20	33	104	20	100	63	122	50	70	93	104	80	40
4	45	0	30	34	33	30	0	64	125	50	80	94	113	80	50
5	56	0	40	35	50	30	10	65	126	50	90	95	120	80	60
6	65	0	50	36	65	30	20	66	125	50	100	96	125	80	70
7	72	0	60	37	78	30	30	67	48	60	0	97	128	80	80
8	77	0	70	38	89	30	40	68	65	60	10	98	129	80	90
9	80	0	80	39	98	30	50	69	80	60	20	99	128	80	100
10	81	0	90	40	105	30	60	70	93	60	30	100	45	90	0
11	80	0	100	41	110	30	70	71	104	60	40	101	62	90	10
12	13	10	0	42	113	30	80	72	113	60	50	102	77	90	20
13	30	10	10	43	114	30	90	73	120	60	60	103	90	90	30
14	45	10	20	44	113	30	100	74	125	60	70	104	101	90	40
15	58	10	30	45	40	40	0	75	128	60	80	105	110	90	50
16	69	10	40	46	57	40	10	76	129	60	90	106	117	90	60
17	78	10	50	47	72	40	20	77	128	60	100	107	122	90	70
18	85	10	60	48	85	40	30	78	49	70	0	108	125	90	80
19	90	10	70	49	96	40	40	79	66	70	10	109	126	90	90
20	93	10	80	50	105	40	50	80	81	70	20	110	125	90	100
21	94	10	90	51	112	40	60	81	94	70	30	111	40	100	0
22	93	10	100	52	117	40	70	82	105	70	40	112	57	100	10
23	24	20	0	53	120	40	80	83	114	70	50	113	72	100	20
24	41	20	10	54	121	40	90	84	121	70	60	114	85	100	30
25	56	20	20	55	120	40	100	85	126	70	70	115	96	100	40
26	69	20	30	56	45	50	0	86	129	70	80	116	105	100	50
27	80	20	40	57	62	50	10	87	130	70	90	117	112	100	60
28	89	20	50	58	77	50	20	88	129	70	100	118	117	100	70
29	96	20	60	59	90	50	30	89	48	80	0	119	120	100	80
30	101	20	70	60	101	50	40	90	65	80	10	120	121	100	90
												121	120	100	100

ANEXO 2. BASE DE DATOS "Sinaloa.xls".

No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P
1	0	0	0	26	98	30	50	51	125	50	100	76	113	80	50
2	30	10	10	27	105	30	60	52	65	60	10	77	120	80	60
3	45	10	20	28	110	30	70	53	80	60	20	78	125	80	70
4	58	10	30	29	113	30	80	54	93	60	30	79	128	80	80
5	69	10	40	30	114	30	90	55	104	60	40	80	129	80	90
6	78	10	50	31	113	30	100	56	113	60	50	81	128	80	100
7	85	10	60	32	57	40	10	57	120	60	60	82	62	90	10
8	90	10	70	33	72	40	20	58	125	60	70	83	77	90	20
9	93	10	80	34	85	40	30	59	128	60	80	84	90	90	30
10	94	10	90	35	96	40	40	60	129	60	90	85	101	90	40
11	93	10	100	36	105	40	50	61	128	60	100	86	110	90	50
12	41	20	10	37	112	40	60	62	66	70	10	87	117	90	60
13	56	20	20	38	117	40	70	63	81	70	20	88	122	90	70
14	69	20	30	39	120	40	80	64	94	70	30	89	125	90	80
15	80	20	40	40	121	40	90	65	105	70	40	90	126	90	90
16	89	20	50	41	120	40	100	66	114	70	50	91	125	90	100
17	96	20	60	42	62	50	10	67	121	70	60	92	57	100	10
18	101	20	70	43	77	50	20	68	126	70	70	93	72	100	20
19	104	20	80	44	90	50	30	69	129	70	80	94	85	100	30
20	105	20	90	45	101	50	40	70	130	70	90	95	96	100	40
21	104	20	100	46	110	50	50	71	129	70	100	96	105	100	50
22	50	30	10	47	117	50	60	72	65	80	10	97	112	100	60
23	65	30	20	48	122	50	70	73	80	80	20	98	117	100	70
24	78	30	30	49	125	50	80	74	93	80	30	99	120	100	80
25	89	30	40	50	126	50	90	75	104	80	40	100	121	100	90
												101	120	100	100

ANEXO 3. BASE DE DATOS “Guadalajara.xls”

No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P	No. Obs.	Y	N	P
1	30	10	10	26	105	30	60	51	65	60	10	76	120	80	60
2	45	10	20	27	110	30	70	52	80	60	20	77	125	80	70
3	58	10	30	28	113	30	80	53	93	60	30	78	128	80	80
4	69	10	40	29	114	30	90	54	104	60	40	79	129	80	90
5	78	10	50	30	113	30	100	55	113	60	50	80	128	80	100
6	85	10	60	31	57	40	10	56	120	60	60	81	62	90	10
7	90	10	70	32	72	40	20	57	125	60	70	82	77	90	20
8	93	10	80	33	85	40	30	58	128	60	80	83	90	90	30
9	94	10	90	34	96	40	40	59	129	60	90	84	101	90	40
10	93	10	100	35	105	40	50	60	128	60	100	85	110	90	50
11	41	20	10	36	112	40	60	61	66	70	10	86	117	90	60
12	56	20	20	37	117	40	70	62	81	70	20	87	122	90	70
13	69	20	30	38	120	40	80	63	94	70	30	88	125	90	80
14	80	20	40	39	121	40	90	64	105	70	40	89	126	90	90
15	89	20	50	40	120	40	100	65	114	70	50	90	125	90	100
16	96	20	60	41	62	50	10	66	121	70	60	91	57	100	10
17	101	20	70	42	77	50	20	67	126	70	70	92	72	100	20
18	104	20	80	43	90	50	30	68	129	70	80	93	85	100	30
19	105	20	90	44	101	50	40	69	130	70	90	94	96	100	40
20	104	20	100	45	110	50	50	70	129	70	100	95	105	100	50
21	50	30	10	46	117	50	60	71	65	80	10	96	112	100	60
22	65	30	20	47	122	50	70	72	80	80	20	97	117	100	70
23	78	30	30	48	125	50	80	73	93	80	30	98	120	100	80
24	89	30	40	49	126	50	90	74	104	80	40	99	121	100	90
25	98	30	50	50	125	50	100	75	113	80	50	100	120	100	100